

котором под координатами  $r$ ,  $z$  подразумеваются безразмерные переменные  $r'$ ,  $z'$ .

Итак, представленные в настоящей работе результаты демонстрируют возможность развития простой и достаточно точной теории клиновых акустических волн на основе использования лучевых представлений. Этот же подход перспективен и для анализа волноводных эффектов в пластинах переменной толщины.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lagasse P. E. // Electron. Lett. 1972. 8, N 15. P. 372. [2] Mason I. M., Motz M. D., Chambers J. // Ibid. N 17. P. 429. [3] Maradudin A. A., Wallis R. F., Mills D. L., Ballard D. L. // Phys. Rev. 1972. B6, N 4. P. 1106. [4] Maradudin A. A. // Jap. J. Appl. Phys. 1974. Suppl. 2, Pt. 2. P. 871. [5] Datta S., Hunsinger V. J. // Phys. Rev. 1977. B16, N 10. P. 4224. [6] McKenna J., Boyd G. D., Thurston R. N. // IEEE Trans. 1974. SU-21, N 3. P. 178. [7] Wagers R. S. // J. Appl. Phys. 1973. 44, N 11. P. 4813. [8] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979. С. 239. [9] Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М., 1963. С. 200. [10] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1976. С. 476. [11] Можаяев В. Г., Крылов В. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1985. 26, № 4. С. 76. [12] Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М., 1966. С. 85. [13] Lagasse P. E., Mason I. M., Ash E. A. // IEEE Trans. 1973. SU-20, N 2. P. 143.

Поступила в редакцию  
16.06.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 5

## ГЕОФИЗИКА

УДК 550.383:523.4—845:523.038

### ПОЛЯ БЫСТРО ВРАЩАЮЩИХСЯ НЕЙТРАЛЬНЫХ ТЕЛ

В. И. Григорьев, Е. В. Григорьева, В. С. Ростовский

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий; ИФЗ АН СССР)

Электрические и магнитные поля вращающихся тел исследуются методом Хартри — Слетера. Сделаны оценки для полей на планетах и звездах, порождаемых градиентами давлений и вращением.

П. Н. Лебедевым опубликованы в 1911 г. результаты экспериментальных исследований вопроса о том, порождает ли вращение нейтрального тела магнитное поле [1]. Побудительной причиной этих исследований явились работы [2, 3] Сузерленда, выдвинувшего гипотезу, что «в каждом нейтральном атоме центры тяжести его разноименных зарядов не совпадают и так сдвинуты друг относительно друга, что центры отрицательных зарядов описывают\* большие пути, чем центры положительных», как написано в работе П. Н. Лебедева. Очевидно, что это должно порождать магнитное поле. Физическая причина смещения зарядов, по гипотезе Сузерленда, — гравитационное воздействие, механизм его оставался нераскрытым и не мог получить теоретического объяснения в доквантовый период. П. Н. Лебедев выдвинул предположение, что аналогичное смещение зарядов дол-

\* Из-за вращения.

жно вызываться и действием центробежных сил. Поставленные им эксперименты и имели целью проверку этого предположения. Уместно подчеркнуть важность проблемы: обнаружение «центробежной поляризации» могло бы явиться ключом к пониманию многих особенностей и «гравитационной поляризации», и той роли, которую последняя играет в формировании магнетизма планет и звезд.

Эксперименты Лебедева не привели к обнаружению ожидавшегося эффекта. Однако ни достаточно полного теоретического анализа явления, ни объяснения отрицательного результата экспериментов пока еще не было. Мы попытаемся восполнить этот пробел.

По нашему мнению, физической причиной перераспределения зарядов в опытах Лебедева является бароэлектрический эффект (БЭ). Ниже предлагается обсуждение БЭ, а также приводятся оценки как для опытов Лебедева, так и для «бароэлектрических» полей Земли и некоторых других небесных тел.

Постановка опытов Лебедева, если не входить в детали, была такова: кольца из различных материалов — проводников и диэлектриков, жидких и твердых — приводились в быстрое вращение, и делались попытки обнаружить и даже измерить магнитное поле. Для калибровки магнитометра на таком же расстоянии от магнитометра, что и вращающиеся кольца, располагалась надлежащим образом ориентированная «проволочная модель». Магнитный момент при пропускании по «модели» тока  $I$  был равен  $(84л/с)I$  А·см·с. Чтобы магнитное поле, порождаемое вращающимися кольцами, было таким же, как и от «модели», по последней, по оценкам П. Н. Лебедева, нужно было пропускать ток  $I \approx 10^{-3}$  А. При таком токе стрелка магнитометра отклонялась на 10 делений, так что можно считать, что чувствительность магнитометра в опытах Лебедева соответствовала эквивалентной силе тока  $I_{\min} \approx 10^{-3} \div 10^{-4}$  А. Это означает, что минимальный магнитный момент, который мог быть обнаружен, порядка  $10^{-2}—10^{-3}$  (в абсолютных гауссовых единицах). Как будет показано ниже, такая чувствительность недостаточна для обнаружения эффекта. Но чтобы понять это, нужно, конечно, прежде всего выяснить, почему вообще центробежное (или гравитационное) поле может вызвать перераспределение зарядов в проводнике, а значит, и появление в нем электрического поля.

Появление равновесного электрического поля в проводнике — общая черта ряда эффектов; так, поле появляется в химически однородном проводнике при поддержании в нем градиента температур, оно возникает и при постоянстве температур, но при наличии химических или иных неоднородностей, например типа наклепов. Поле возникает и в химически однородном изотермическом веществе при наличии в нем неоднородных давлений. Последнее и составляет суть БЭ. Поскольку в опытах Лебедева кольца были химически однородными, а градиенты температур пренебрежимо малыми, именно БЭ и мог определять перераспределение зарядов и, следовательно, появление магнитных полей.

Попытаемся оценить, какие же поля возникают благодаря БЭ. Но в первую очередь обратимся к качественной физической картине явления. По мере того как возрастает давление, возрастает и энергия электронов в проводнике, а значит, и химический потенциал. Если давления в различных участках вещества различны, то электроны должны переходить из областей с большими в области с меньшими давлениями. Переходы завершатся, когда электрохимический потенциал во всех точках вещества окажется постоянным. Как было показано в

[4], это условие постоянства электрохимического потенциала можно представить в виде

$$\text{grad}(W + E^2/(8\pi)) = 0, \quad (1)$$

где  $W$  — усредненная по физически бесконечно малым объемам плотность «избыточной» (по сравнению со значением при нулевом давлении) энергии,  $E$  — усредненная по тем же объемам напряженность электрического поля. Условие (1) весьма наглядно: равновесие устанавливается, когда полная «избыточная» плотность энергии  $W + E^2/(8\pi)$  везде одинакова, так что дальнейшее перераспределение зарядов перестает быть энергетически выгодным.

Пользуясь (1), можно найти напряженность электрического поля, если известно  $W$ . Последнее зависит не только от химического состава среды, но и от параметров, определяющих ее состояние. При рассмотрении БЭ на первый план выходит давление  $p$ : нужно исследовать зависимость  $W(p)$ . В работе [4] такая задача решалась в рамках феноменологического подхода. Здесь предлагается иное — микроскопическое — рассмотрение, позволяющее обходиться без привлечения феноменологических параметров и обладающее очевидными преимуществами. Конечно, микроскопическое описание вещества требует привлечения упрощающих модельных предположений. Ниже будем пользоваться следующей моделью.

Будем описывать среду как совокупность сферически симметричных нейтральных атомных ячеек. Для описания каждой такой ячейки обычно используются приближенные квантовомеханические методы; мы будем проводить расчеты с помощью метода Хартри—Слэтера [5].

Волновая функция  $Z$  электронов атомной ячейки записывается при этом в виде детерминанта  $\Phi = \det \|\psi_i\|$ , где одноэлектронные функции  $\psi_i \equiv |n_i, l_i, m_i, s_i\rangle = R_i(r) Y_i(\theta, \varphi) U(s_i)$ , а  $R_i = \chi_i/r$  определяется из уравнений

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l_i(l_i+1)}{r^2} - \frac{2Z}{r} + 2(V_e + V_{\text{ex}} - \mathcal{E}_i) \right\} \chi_i = 0,$$

$$V_e = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^b \rho(r') r' dr', \quad (2)$$

$$V_{\text{ex}} = 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \rho^{1/3},$$

$$\rho = \sum_i |\psi_i|^2,$$

черта в выражении для плотности заряда  $\rho$  обозначает усреднение по углам. Заметим, что здесь и далее используются, если не оговорено особо, атомные единицы и традиционные квантовомеханические обозначения. Отметим только, что отличительной особенностью данного метода является применение усредненного выражения для обменного взаимодействия, что находит отражение в написании обменного потенциала  $V_{\text{ex}}$ ; такое описание существенно проще, чем более точное хартри-фоковское [6]. Однако даже после такого упрощения задача требует привлечения вычислительной техники.

В настоящей работе использовались результаты вычислений по программе, разработанной В. С. Ростовским. Вычислялись энергия

всех электронов ячейки  $\mathcal{E}(b)$  как функция ее радиуса  $b$  и распределение плотности при смещении ядра под действием внешних сил. Последнее позволило убедиться, что нарушение сферической симметрии ячеек вносит в общий эффект поляризации пренебрежимо малый вклад, так что основную роль играет перераспределение электронов между различными ячейками. Однако, как показывают оценки, даже при давлениях порядка фермиевских доля ячеек, из которых электроны переходят в области низких давлений, лишь порядка  $10^{-16}$ , так что приближение нейтральных ячеек является вполне приемлемым. Отметим еще один важный пункт: уравнения (2) решаются при граничном условии  $\frac{d}{dr} R_i(r)|_{r=b} = 0$ , посредством которого косвенно учитывается взаимодействие между ячейками; заметим, что электростатическое взаимодействие между сферически симметричными нейтральными ячейками отсутствует.

Полученные значения  $\mathcal{E}(b)$  при тех относительно небольших давлениях, которые достигались в образцах в опытах Лебедева, достаточно точно (с относительной погрешностью  $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} \sim 10^{-5}\%$ ) описываются с помощью простой интерполяционной формулы

$$\mathcal{E}(b) = 2\{a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3\}. \quad (3)$$

Значения коэффициентов для ряда веществ, найденные в результате расчетов, приведены в таблице; там же показаны значения радиусов ячеек  $b_0$  при нулевом давлении и энергии  $\mathcal{E}(b_0)$ .

Элемент	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_0$	$\mathcal{E}(b_0)$
Al	-480,31501	-18,501967	8,182	-1,1733333	1,941	-493,982
Fe	-1981,7156	-1289,6083	945	-229,16667	1,258	-2564,76
Ti	-1364,1058	-614,35333	351	-66,6667	1,664	-1721,67
Pb	-35274,922	-7104,5656	4215	-833,33333	1,658	-3926,56
Hg	-33418,755	-7374,0955	5007,9165	-1133,3333	1,448	-3737,16

Заметим, что точность определения приведенных в таблице коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, a_3$  позволяет обеспечить указанную выше относительную точность при нахождении энергии.

Пользуясь (3), легко определить давление:

$$p = -\frac{1}{4\pi b^2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b} = -\frac{1}{2\pi b^2} \{a_1 + 2a_2 b + 3a_3 b^2\}. \quad (4)$$

Для дальнейшего, однако, важнее выражение радиуса ячейки как функции давления:

$$b = -\frac{a_2}{3a_3 + 2\pi p} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{a_1}{a_2^2} (3a_3 + 2\pi p)} \right\}. \quad (5)$$

Плотность «избыточной» энергии

$$W = \frac{3}{4\pi b^3} \{\mathcal{E}(b) - \mathcal{E}(b_0)\} = \frac{3\delta^2}{4\pi b^3} (a_2 + 3b_0 a_3 + a_3 \delta),$$

$$\delta \equiv b - b_0,$$

поскольку  $a_1 + 2a_2 b_0 + 3a_3 b_0^2 = 0$ .

Пользуясь тем, что в опытах Лебедева максимальные давления  $p$  были такими, что  $(2\pi a_1/a_2^2)p$  примерно на пять порядков меньше, чем  $1-3a_1a_3/a_2^2$ , можно в выражении для  $\delta$  ограничиться линейным по  $p$  членом:

$$\delta \approx -p \frac{2\pi b_0^2}{a_2 + 3a_3 b_0}. \quad (6)$$

Поскольку  $\delta \ll b_0$ , выражение для  $W$  принимает весьма простой вид:

$$W = \frac{1}{2} A p^2; \quad A \equiv \frac{3\pi b_0}{a_2 + 3a_3 b_0}. \quad (7)$$

Для нахождения давлений конкретизируем задачу: рассмотрим полный цилиндр (внутренний радиус  $R_1$ , внешний —  $R_2$ ), вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ ; чтобы не усложнять задачу учетом краевых эффектов (которые в действительности не меняют порядков интересующих нас величин), примем, что длина цилиндра  $\mathcal{L} \gg \gg R_2$ .

Деформации колец в опытах Лебедева с хорошим запасом точности можно считать упругими. Пользуясь обычными уравнениями теории упругости, нетрудно убедиться, что если и внутренняя и внешняя поверхности цилиндра являются незакрепленными, то давление на расстоянии  $r$  от оси вращения равно

$$p = \frac{\tau \omega^2 (1 + \sigma)}{12 (1 - \sigma)} \{2r^2 - 3(R_1^2 + R_2^2)\}, \quad (8)$$

где  $\tau$  — механическая плотность,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. Давление  $p < 0$  при всех  $R_2 \gg r \gg R_1$ , т. е. цилиндр «работает на растяжение», причем это растяжение убывает по мере увеличения  $r$ .

Пользуясь осесимметричностью обсуждаемой задачи, т. е. тем, что  $\mathbf{E} = i_r E(r)$ , получаем исходя из (1)

$$E(r) = \sqrt{8\pi (W_0 - W(r))}. \quad (9)$$

Постоянная интегрирования  $W_0 = W(R_1)$ . Подставляя (7) и (8), находим

$$E(r) = \frac{\tau \omega^2 (1 + \sigma)}{3 (1 - \sigma)} \sqrt{\pi A \sqrt{(r^2 - R_1^2)(2R_1^2 + 3R_2^2 - r^2)}}. \quad (10)$$

Плотность объемных зарядов  $\rho_{об}$  определяется уравнением Максвелла

$$\rho_{об} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi r} \frac{d}{dr} (rE(r)). \quad (11)$$

Поверхностная плотность зарядов на внешней границе цилиндра равна

$$\rho_{пов} = -(1/4\pi) E(R_2). \quad (12)$$

Поверхностные заряды на внутренней границе отсутствуют.

Перейдем теперь к рассмотрению магнитного момента. Его можно разбить на две части, первая из которых обусловлена вращением объемных, а вторая — поверхностных зарядов:  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{об} + \mathbf{M}_{пов}$ ,

$$\mathbf{M}_{об} = (\omega/2c) \int d\mathbf{r} \rho_{об}(r) \mathbf{r}; \quad \mathbf{M}_{пов} = \omega \pi \mathcal{L} R_2^2 \rho_{пов} / c. \quad (13)$$

Подставляя выражения для плотностей объемных и поверхностных зарядов, можно переписать  $M$  в виде

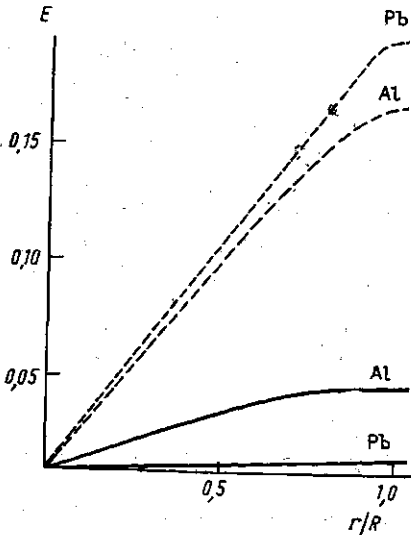
$$M = -\frac{\omega \mathcal{L}}{4c} \int_{R_1}^{R_2} dr r E(r). \quad (14)$$

Полный магнитный момент полого вращающегося нейтрального цилиндра оказывается направленным противоположно  $\omega$ . Для оценки по порядку величины численного значения  $|M|$ , принимая для параметров значения, близкие к экспериментальным:  $\tau \approx 10$ ;  $\omega \approx 3000$ ;  $\sigma \approx 0,3$ ;  $R_1 \approx 1$ ;  $R_2 \approx 2$ ;  $\mathcal{L} \approx 5$  (в единицах СГС), получим, что  $|M| \sim 10^{-7}$

СГС, даже если положить\*  $A \sim 1$  (для большинства металлов  $A$  примерно на порядок меньше и лишь у алюминия на порядок больше). Это почти на пять порядков меньше того наименьшего магнитного момента, который мог быть замечен в опытах Лебедева, чем и объясняются отрицательные результаты последних.

Поиски эффекта Лебедева — намагничивания равномерным вращением — были продолжены в 1928 г. американскими исследователями [7] и тоже не дали результатов. Лишь в 1984 г. Б. В. Васильев, используя новую экспериментальную технику (сверхпроводящие экраны, сквиды), смог зарегистрировать магнитное поле, возникавшее при быстром вращении ртутного цилиндра в титановой оболочке [8] (отметим, что магнитное поле оказалось направленным параллельно  $\omega$ , что совпадает с предсказанием теории БЭ), хотя, как считает Б. В. Васильев, для получения количественной информации точность эксперимента следует еще повысить.

Напряженность электрического поля  $E$  как функция  $r/R$ ; непрерывные линии — по «микроскопической», штриховые — по «феноменологической» теории. Пояснения в тексте



Однако следует ли из слабости эффекта, что БЭ не может обуславливать заметных полей, когда речь идет о планетах и звездах?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим предельно упрощенную модель: «планета» — массивный, холодный, химически однородный шар радиуса  $R$  и плотности  $\tau$ , вращающийся как целое с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Шар в целом нейтрален, но благодаря БЭ электроны из его внутренней области частично вытесняются в поверхность. Напряженность электрического поля ввиду сферической симметрии задачи имеет только радиальную компоненту, которая, как вытекает из (1), равна

$$E(r) = \sqrt{8\pi} (W_0 - W(r)), \quad (15)$$

где  $W_0 = W(0)$ . Для распределения давлений  $p(r)$ , определяющих  $W(r)$ , можно принять выражение

$$p = \alpha \tau g R (1 - r^2/R^2). \quad (16)$$

\* В атомных единицах; в единицах СГС это эквивалентно  $2,93 \cdot 10^{-14}$ .

Подставляя значения параметров для Земли, получаем для множителя  $ag\tau R$  значение, примерно равное  $3 \cdot 10^{12}$  СГС.

По заданному распределению давлений, пользуясь описанным выше методом, можно получить  $E(r)$ . Для наглядности результаты приведены на рисунке для двух элементов: Al и Pb; заметим, что  $E(r)$  указывается в атомных единицах (которые в  $1,71 \cdot 10^7$  раз больше единиц СГС). Для других элементов получаются аналогичные кривые, и разброс примерно в пределах одного порядка величины; это говорит о том, что зависимость от химического состава среды является не слишком сильной.

Получаемые в рамках предложенного здесь «микроскопического» подхода оценки для  $E(r)$ , в общем, довольно близки тем, что были получены в [4], хотя найденные там «феноменологические» значения полей  $E(r)$  были примерно на порядок больше. Это обстоятельство позволяет использовать преимущества феноменологической теории, которая приводит к простым аналитическим выражениям для напряженностей электрического и магнитного полей, но только в выражении для этих напряженностей (и для магнитного момента, естественно) нужно ввести поправочный коэффициент порядка  $10^{-1}$ . Оценки, получаемые таким образом, показывают, что «бароэлектрическая» доля дипольного магнитного момента от наблюдаемого составляет для Солнца  $\sim 0,1\%$ , для Земли  $\sim 10\%$ , для Меркурия, Венеры, Марса, Луны почти  $100\%$ . Для планет-гигантов теория БЭ дает численные оценки магнитных моментов, довольно близкие к наблюдаемым значениям, но направленные противоположно механическим моментам, тогда как эмпирические данные указывают на иную их направленность. Таким образом, хотя БЭ и определяет ощутимый вклад в магнитные поля небесных тел, но для полного описания этих полей нужно учитывать и другие, в первую очередь магнитогидродинамические, эффекты, без которых, в частности, нельзя получить объяснение вариаций и даже инверсий магнитного поля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лебедев П. Н. // Журн. русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 1911. 45. С. 484.  
[2] Sutherland W. // Terrest. Magn. and Atm. Electr. 1903. 8. P. 49. [3] Sutherland W. // Ibid. 1904. 9. P. 167. [4] Григорьев В. И., Григорьева Е. В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 2. С. 3. [5] Slater J. C. // Phys. Rev. 1951. 81. P. 385. [6] Хартри Д. Р. Расчеты атомных структур. М., 1960. [7] Swann W., Langacoe F. G. // J. Franklin Inst. 1928. 205, N 4. P. 421. [8] Васильев Б. В. Препринт ОИЯИ Р14-84-255. Дубна, 1984.

Поступила в редакцию  
21.06.88