КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12.01

ОДНОМЕРНАЯ ГРАВИТАЦИЯ НА ЗАМКНУТОМ МНОГООБРАЗИИ

А. П. Демичев, М. З. Иофа

(НИИЯФ)

Исследуется одномерная общековариантная теория поля на многообразии, топологически эквивалентном окружности. Показана необходимость модификации в данной модели квантового BRST-оператора. Установлена связь с однопетлевыми амплитудами в полевой теории на евклидовом d-мерном пространстве.

1. Как известно, первично-квантованная теория струн помимо шансов оказаться «теорией всего» является еще и хорошей моделью для исследования вопросов квантования общековариантных полевых теорий [1]. Существует, однако, еще более простая модель — одномерная, которая, несмотря на относительную техническую простоту, обладает многими специфическими чертами гравитационных общековариантных теорий.

В данной заметке после определения модели кратко обсуждаются некоторые ее свойства, связанные с проблемами квантовой гравитации и теории струн.

2. Рассматривается одномерное замкнутое многообразие M, топологически эквивалентное окружности, на котором определена динамическая метрика $g(\tau)=e^2(\tau)$; $\tau\in[0, 1]$, где e — векторное реперное поле. Чтобы получить содержательную одномерную гравитацию, вводится поле материи — бозонное поле $x^\mu(\tau)$, принимающее значения в некотором евклидовом пространстве E, с действием

$$S_{\text{кл}}=\frac{1}{2}\int\limits_M d\tau\,[e^{-1}(\partial x)^2+em^2], \tag{1}$$

где m^2 — «космологическая постоянная». Индекс поля $x(\tau)$ всюду опускается. Действие (1) инвариантно относительно общековариантных преобразований (репараметризаций) и сдвигов в пространстве E, которые в инфинитезимальной форме имеют вид

$$\delta e(\tau)=\partial(e(\tau)\,\varepsilon(\tau));\quad \delta x(\tau)=\varepsilon(\tau)\,\partial x(\tau)+a;\quad a=\text{const}, \tag{2}$$

где $\varepsilon(\tau)$ — векторное поле на M. Мы не рассматриваем группу поворотов в пространстве E, так как в силу своей компактности эта группа меняет лишь нормировочный фактор производящего функционала.

Весьма интересно, что действие (1) можно в равной степени рассматривать и как калибровочно-инвариантное относительно абелевой группы

$$\delta e=\partial f,\qquad \delta x=e^{-1}f\partial x+a, \tag{3}$$

где f — скалярное поле на M. То, что преобразования (2) и (3) образуют различные неизоморфные группы, следует из того, что преобразования (2) некоммутативны ($[\delta_{\varepsilon_1}, \delta_{\varepsilon_2}]e=\delta_{[\varepsilon_1,\varepsilon_2]}e$), а (3) — коммутативны. Однако орбиты этих групп в пространстве полей $\{e(\tau), x(\tau)\}$, как можно показать, полностью совпадают, т. е. эти разные калибровочные теории физически эквивалентны. Имея в виду аналогию с теорией струн, мы будем рассматривать преобразования (2).

3. Квантование общековариантных теорий с замкнутой космологией наиболее удобно проводить в рамках лангранжева *BRST*-формализма [2] и с помощью континуального интеграла (глобальный гамильтониан в этих теориях тождественно равен нулю). *BRST*-преобразования, соответствующие (2), имеют вид

$$\delta e=\lambda s(e)=\lambda\partial(ec),\quad \delta b=\lambda s(b)=0,$$

$$\delta x=\lambda s(x)=\lambda(c\,\partial x+v),\quad \delta v=\lambda s(v)=0,$$

$$\delta c=\lambda s(c)=\lambda c\,\partial c,\quad \delta\bar v=\lambda s(\bar v)=i\lambda\varkappa,$$

$$\delta\bar c=\lambda s(\bar c)=i\lambda b,\quad \delta\varkappa=\lambda s(\varkappa)=0,$$

где c, $\bar{c}$, b — духовое, антидуховое и вспомогательное поля, отвечающие диффеоморфизмам; v, $\bar{v}$, $\varkappa$ — постоянные поля, соответствующие трансляциям в пространстве E. Действие, фиксирующее калибровку, берется в виде

$$S_{\text{фк}}=\int d\tau s\left[\theta e\bar{c}\,(e^{-1}-\hat{e}^{-1})+\frac{1}{\sqrt{e_0}}\,\bar{v}ex\right]=$$

$$=\int d\tau\left\{i\theta eb\,(e^{-1}-\hat{e}^{-1})+\theta e^{-1}\bar{c}\,\partial\,(ec)+\frac{i}{\sqrt{e_0}}\,\varkappa ex-\frac{e}{\sqrt{e_0}}\,\bar{v}v\right\}, \qquad (4)$$

где $\hat{e}(\tau)$ — заданное (опорное) векторное поле, из которого любое поле $e(\tau)$ получается калибровочным преобразованием. Первый и третий члены (4) фиксируют диффеоморфизмы и трансляции в E. Однако, так же как и в теории струны на торе [3], не существует удобной калибровки, фиксирующей всю группу диффеоморфизмов. Группа остаточной симметрии является глобальной и компактной: $\tau\to\tau+\zeta e^{-1}(\tau)$, $\delta e=0$, $\delta x=\zeta e^{-1}\partial x$, $0\leqslant\zeta=\text{const}\leqslant e_0\equiv\int d\tau e(\tau)$, но у духовых полей появляются нулевые моды, которые необходимо исключить из интегрирования в континуальном интеграле. При этом область интегрирования оказывается неинвариантной относительно $BRST$-преобразований, что приводит к аномалии в тождестве Уорда (подробнее см. [4]):

$$\Omega Z=-AZ,$$

где

$$\Omega=-\int d\tau\left[J\partial\left(\frac{\delta}{\delta\mathscr{G}}\,\frac{\delta}{\delta\bar{\gamma}}\,\frac{\delta}{\delta J}+\mathscr{G}'\partial\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\gamma}}\right)-\mathscr{G}\left(\frac{\delta}{\delta\mathscr{G}}\right)^2\partial\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\gamma}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\beta}{\theta}\,\frac{\delta}{\delta_{\text{к}}\hat{e}(\tau)}\right]+\frac{\beta_0}{\sqrt{e_0}}\,\frac{d}{d\theta}$$

— «классический» оператор Уорда, полученный $BRST$-вариацией токового действия $S_J=$ $=\int d\tau e(\tau)\,[J(\tau)x(\tau)+\bar{\gamma}(\tau)c(\tau)+\bar{c}(\tau)\beta(\tau)+\mathscr{G}'(\tau)+e^{-2}(\tau)\mathscr{G}(\tau)]$; $\beta_0=\frac{1}{\sqrt{e_0}}\times$ $\times\int d\tau\hat{e}^2(\tau)\beta(\tau)$; $\delta_{\text{к}}\hat{e}(\tau)$ — калибровочная вариация репера $\hat{e}(\tau)$; $Z[J,\bar{\gamma},\beta,\mathscr{G}',\mathscr{G},\hat{e}_{\text{к}}]=\int D[e,x,b,\bar{c},c]\,d\varkappa\,dv\,d\bar{v}\exp\{-S_{\text{кл}}-S_{\text{фк}}-S_J\}$. Аномалия имеет вид

$$A=-\bar{\gamma}_0\int d\tau\left[\frac{\delta}{\delta\bar{\gamma}(\tau)}\,\partial\,\frac{\delta}{\delta\bar{\gamma}(\tau)}\right];\quad \bar{\gamma}_0=\frac{1}{\sqrt{e_0}}\int d\tau\bar{\gamma}(\tau)$$

и соответствует $BRST$-вариации границы области интегрирования по духам. Из-за наличия аномалии для доказательства теоремы об отщеплении шпурионов необходимо использовать модифицированный $BRST$-оператор $\tilde{\Omega}=\Omega+A$, который оказывается нильпотентным на орбитах группы остаточной калибровочной симметрии, что вполне достаточно для доказательства самосогласованности теории.

5. В заключение рассмотрим вопрос о соотношении между корреляторами вершинных операторов в одномерной теории на замкнутом многообразии и амплитудами рассеяния в теории поля с взаимодействием φ^3 в d-мерном пространстве E.

Сразу отметим, что диффеоморфная инвариантность меры в континуальном интеграле не нарушится, если ее умножить на произвольную функцию $F(e_0)$. Полевой теории соответствует определенный выбор (способ квантования) функции $F(e_0)$. Чтобы это показать, сопоставим ампутированным амплитудам полевой теории в d-мерном пространстве средние от произведений вершинных операторов $V(p_j)=\int d\tau e(\tau)\times$ $\times\exp\{-ip_jx(\tau)\}$, где p_j — d-мерный внешний импульс. Операторы $V(p_j)$ диффеоморфно инвариантны; относительно трансляций (3) в пространстве E произведение $\prod_{i=1}^{N}V(p_j)$ инвариантно только в случае $\sum_{i=1}^{N}p_i=0$, что соответствует сохранению энергии-импульса в евклидовом пространстве.

Среднее от одного вершинного оператора должно равняться пропагатору скалярного поля φ при совпадающих аргументах:

$$D_c(0) = \text{const} \int \frac{d^d k}{k^2 + m^2} = \text{const} \int d^d k \int_0^\infty de_0 \exp\{-e_0(k^2 + m^2)\} =$$

$$= \text{const} \int \frac{de_0}{e_0^{d/2}} \exp\{-m^2 e_0\}. \tag{5}$$

Вычисление среднего дает

$$\langle V(p=0)\rangle = \langle e_0\rangle = \text{const} \int de_0 e_0 F(e_0) \left(\frac{\text{Det}'\,\Delta}{e_0}\right)^{-(d-1)/2} \exp\{-m^2 e_0\} =$$

$$= \text{const} \int de_0 e_0 F(e_0)\, e_0^{-(d-1)/2} \exp\{-m^2 e_0\}. \tag{6}$$

Здесь детерминант лапласиана Δ регуляризован с помощью ζ-функции. Из сравнения (5) и (6) получаем $F(e_0) = e_0^{-3/2}$.

Теперь перейдем к двухточечной функции в теории поля φ^3:

$$\int dk \frac{1}{(k^2 + m^2)} \frac{1}{[(p-k)^2 + m^2]} = \int d\lambda\, d\sigma\, \lambda^{-(d/2-1)} \exp\{-[\sigma(1-\sigma)\lambda p^2 + \lambda m^2]\}. \tag{7}$$

Здесь использовано стандартное α-представление для фейнмановских амплитуд [5]. Двухточечной функции отвечает среднее от двух вершинных операторов, которое сводится к вычислению производящего функционала с током $J(\tau) = ipe^{-1}(\tau)[\delta(\sigma_1 - \tau) - \delta(\sigma_2 - \tau)]$. При том же выборе функции $F(e_0)$ получаем

$$\langle V(p)\, V(-p)\rangle = \int d\sigma_1\, d\sigma_2 \int de_0 e_0^{-(d/2-1)} \exp\{-m^2 e_0 - p^2[H(0) - H(\sigma_1 - \sigma_2)]\}, \tag{8}$$

где $H(\sigma_1 - \sigma_2)$ — функция Грина оператора Лапласа Δ, которая в калибровке $e(\tau) = e_0$ удовлетворяет уравнению

$$\partial^2_{\tau_1} H(\tau_1 - \tau_2) = e_0 \left(\sum_n e^{i\cdot 2\pi n(\tau_1 - \tau_2)} - 1\right) = 2e_0 \sum_{n=1}^\infty \cos 2\pi n(\tau_1 - \tau_2).$$

Отсюда

$$H(\tau) = -2 \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2\pi n\tau}{(2\pi n)^2} = -2e_0 B_2(\tau) = -2e_0 \left[\frac{1}{2}\tau(\tau - 1) + B_2(0)\right],$$

где $B_2(\tau)$ — квадратичный многочлен Бернулли. Подставляя это выражение для $H(\tau)$ в (8) и сравнивая с (7), получаем, что коррелятор двух вершинных операторов в одномерной теории соответствует однопетлевой двухточечной функции в полевой теории φ^3 в d-мерном пространстве E. Аналогичным образом можно доказать соответствие и многоточечных однопетлевых функций корреляторам вершинных операторов на замкнутом одномерном многообразии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Green M. B., Schwarz J. H., Witten E. Superstring theory. Cambridge, 1987. [2] Baulieu L.//Phys. Rep. 1985. **129**, N 1. P. 1. [3] Tseytlin A. A.//Phys. Lett. 1988. **B202**, N 1. P. 81. [4] Demichev A. P., Iofa M. Z. Preprint INP MSU, 1989, N 89-20/97. [5] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М., 1976. С. 210.

Поступила в редакцию
13.03.89