КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.1.01

К СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫМ РЕШЕНИЯМ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

А. А. Власов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В РТГ получен общий вид сферически-симметричных решений и показано, что сферически-симметричные распределения вещества в РТГ гравитационных волн не излучают.

Релятивистская теория гравитации (РТГ) была предложена в работе [1] и сейчас широко разрабатывается. Основная идея РТГ следующая. Гравитационное поле Ψ^{ij} рассматривается как стандартное классическое поле, действующее в плоском пространстве-времени — пространстве Минковского с метрикой γ^{ij}. Все задачи на нахождение гравитационного поля в РТГ ставятся в полном соответствии с методами математической физики для классических полей: в исходном пространстве Минковского с помощью выбора формы γ^{ij} задается система координат, в этой системе координат ставятся дополнительные условия, характеризующие конкретную задачу (начальные, граничные, асимптотические, симметрийные и т. п.), а затем с учетом поставленных дополнительных условий ищется решение соответствующих уравнений. Таким образом, роль пространства Минковского и его метрики γ^{ij} существенна уже на начальной стадии постановки задач в РТГ, и, следовательно, введение γ^{ij} в РТГ нельзя рассматривать как некий формальный прием, не затрагивающий гравитационную физику. С помощью γ^{ij} и Ψ^{ij} в РТГ определяется «эффективная» метрика g^{ij}: $\sqrt{g/\gamma}\, g^{ij} = \gamma^{ij} + \Psi^{ij}$, которая задает эффективное искривленное пространство.

Формально удобно уравнения РТГ для поля Ψ^{ij} при выбранной γ^{ij} записать в терминах метрики g^{ij} и метрики γ^{ij}:

$$R_{ij} - g_{ij}R/2 = 8\pi T_{ij}; \tag{1а}$$

$$D_j\left(\sqrt{g/\gamma}\, g^{ij}\right) = 0. \tag{1б}$$

Здесь уравнения (1а) — уравнения Гильберта—Эйнштейна, R_{ij} и R — тензоры кривизны эффективного пространства с метрикой g_{ij}; уравнения (1б) — ковариантные уравнения, делающие систему (1) полной, D_j — ковариантная по γ_{ij} производная. Следует всегда помнить, что хотя формально метрика γ_{ij} не входит явно в (1а) и в уравнения движения вещества $\nabla_j T^{ij} = 0$ (∇_j — ковариантная по g_{ij} производная), возникающие вследствие тождеств Бианки для (1а), однако γ_{ij} влияет существенным образом на решения системы (1) как через дополнительное уравнение (1б), так и вследствие постановки гравитационных задач в РТГ. Инвариантными характеристиками гравитационного поля в РТГ могут служить инварианты вида $R_{ijpq}\gamma^{ip}\gamma^{jq}$, $R_{ij}\gamma^{ij}$, $g_{ij}\gamma^{ij}$, g/γ и т. п.

Как показано в [2], уравнения (1б) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\Box \xi^i = -\gamma^i_{pq}(\xi)\, \frac{\partial \xi^p}{\partial x^m}\, \frac{\partial \xi^q}{\partial x^n}\, g^{mn}(x), \tag{1в}$$

$$\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{-g(x)}}\, \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{-g(x)}\, g^{pq}(x)\, \frac{\partial}{\partial x^q}\right),$$

где ξ^i — координаты пространства Минковского с метрикой $\gamma_{ij}(\xi)$ и символами Кристоффеля $\gamma^i{}_{pq}(\xi)$, x^i — переменные, в которых записана некоторая эффективная метрика $g_{ij}(x)$. Из уравнения (1в) видно, что для любой метрики $g_{ij}(x)$ в переменных x^i, удовлетворяющей уравнениям (1а), можно найти соответствующие координаты ξ^i пространства Минковского. Но это, конечно, не означает, что таким образом найденное соответствие между ξ^i и x^i будет удовлетворять поставленной конкретной гравитационной задаче РТГ. Другими словами, утверждение, что все решения уравнений (1а) в силу существования уравнений (1в) являются решениями РТГ, неверно.

Обратимся теперь к сферически-симметричной задаче в РТГ. Она рассматривалась во многих работах, здесь же мы сделаем несколько дополнений. Известно утверждение (теорема Биркгоффа), что в сферически-симметричном случае все вакуумные ($T_{ij}=0$) решения уравнений (1а) можно свести тем или иным преобразованием координат к стандартному шварцшильдову виду (о классе непрерывности требуемых для этого функций мы здесь не говорим)

$$ds^2=(1-2m/\rho)\,d\tau^2-(1-2m/\rho)^{-1}\,d\rho^2-\rho^2\,d\Omega^2. \qquad (2)$$

Тогда связь координат ξ^i пространства Минковского, $(\xi^i)=(t,\ r,\ \theta,\ \varphi)$, $\gamma_{ij}(\xi)=\mathrm{diag}(1,\ -1,\ -r^2,\ -r^2\sin^2\theta)$ с координатами $(x^i)=(\tau,\ \rho,\ \theta,\ \varphi)$, в которых записана метрика (2), задается решением уравнений (1в), которое можно представить через известные [3] шварцшильдовы полиномы $Q^{(iw)}_{(l)}(\rho)$:

$$\begin{aligned} t&=\tau+c_1\ln\frac{\rho-2m}{\rho}+\int U(w)\exp(i\tau\omega/4m)\,Q^{(iw)}_{(0)}(\rho)\,dw;\\ r&=\rho-m+c_2\left[\frac{\rho-m}{2m}\ln\frac{\rho-2m}{\rho}+1\right]+\int V(w)\exp(i\tau w/4m)\,Q^{(iw)}_{(1)}(\rho)\,dw.\end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь c_1, c_2, U, V — произвольные константы и функции, определяемые из условий на границе конкретного сферически-симметричного распределения вещества. Решение (3) уравнений (1в) является точным и общим и выбрано так, что $t\to\tau$ и $r\to\rho$ при $\rho\to\infty$.

Таким образом, (3) вместе с метрикой g_{ij} (2) и метрикой $\gamma_{ij}(\xi)$ образует точное и полное внешнее решение сферически-симметричной задачи в РТГ. В частности, при $c_1=c_2=U=V=0$, мы получаем известное фоковское решение. С помощью (3) можно построить метрику $\tilde{g}_{ij}(\xi)$ в координатах ξ^i. Эта метрика, как следует из (3), в общем случае будет нестатичной $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{g}_{ij}(\xi)\neq 0\right)$ и недиагональной ($\tilde{g}_{ij}\neq 0$ при $i\neq j$). Конкретная форма решения $\tilde{g}_{ij}(\xi)$ зависит от поставленных (при выбранной $\gamma_{ij}(\xi)$) дополнительных условий, а следовательно, от внутреннего решения и поэтому будет разной для различных задач. В частности, при соответствующих условиях в нуле и на границе возможен случай $c_1=c_2=U=V=0$ (при $\rho(r=0)\neq 0$, [4]). Следовательно, иногда встречающееся утверждение, что все сферически-симметричные решения в РТГ обязательно статичны, неверно. Как следует из сказанного выше, теорему Биркгоффа в РТГ надо понимать только как утверждение о том, что найдутся такие преобразования координат для поставленной задачи, в которых полученное решение примет стандартный вид (2). Более того, как показано на частном примере первоначально покоящейся, а затем равномерно расширяющейся оболочки [5], нестатичность гравитационного поля может быть явно обнаружена.

В заключение отметим, что хотя для сферически-симметричного распределения вещества гравитационное поле может быть нестатично, тем не менее такое вещество гравитационных волн не испускает. Действительно, при $\rho\to\infty$ из (3) получаем

$$t\simeq\tau+a(\tau\pm\rho)/\rho;\quad r\simeq\rho-c_2m^2/3\rho^2+b(\tau\pm\rho)/\rho^2, \qquad (4)$$

где a и b — произвольные функции. Вычисление с учетом (4) волновых добавок в поле $\Psi^{ij}=\sqrt{\tilde{g}/\gamma}\,\tilde{g}^{ij}-\gamma^{ij}$ дает

$$-\Psi^0_0=\Psi^1_1=\dot{a}/r;\quad \Psi^{01}=\mp\dot{a}/r. \qquad (5)$$

Вычисление компонент $t^{0\alpha}$ тензора энергии-импульса гравитационного поля в волновой зоне, равных [6] $t^{0\alpha}=n^\alpha(\dot{\Psi}_{pq}\dot{\Psi}^{pq}-(1/2)\,\dot{\Psi}^2)\ (\mathbf{n}=\mathbf{r}/r)$, с учетом (5) приводит к результату: $t^{0\alpha}=O(1/r^3)$. Отсюда поток энергии гравитационных волн равен нулю, что и требовалось доказать. Полная масса такой гравитационной системы сохраняется и, как следует из (4) и (2), равна m.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Логунов А. А., Власов А. А.//ТМФ. 1984. 60, № 1. С. 3; Власов А. А., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.//ТМФ. 1984. 61, № 3. С. 323. [2] Власов А. А., Логунов А. А.//ТМФ. 1987. 70, № 2. С. 171. [3] Jonson B., Can-

delas P.//Phys. Rev. 1986. **D33**, N 6. P. 1590. [4] Власов А. А.//ТМФ. 1987. **73**, № 1. С. 154. [5] Власов А. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. **30**, № 5. С. 72. [6] Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1986.

Поступила в редакцию
29.05.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 1

УДК 530.145.6

РАДИАЦИОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ ОДНОМЕРНОГО АТОМА ВОДОРОДА

В. Б. Гостев, И. В. Гостев, А. Р. Френкин, Г. А. Чижов

(кафедра теоретической физики)

На основе предложенной нами модели одномерного атома водорода (1Н) [1, 2] показано, что вероятности спонтанных переходов у 1Н имеют тот же порядок, что и у трехмерного атома водорода. Указана принципиальная возможность наблюдения этих переходов.

Заряженная частица в одномерном притягивающем кулоновском поле, совершающая финитное движение (1Н) и описываемая гамильтонианом ($\hbar=2m=-e=1$)

$$\widehat{H}=-\frac{d^2}{dx^2}-\frac{1}{|x|},\quad -\infty<x<\infty, \tag{1}$$

давно уже рассматривалась в литературе ([3], обзор [4]).

В отличие от результатов [3, 5] в нашей модели 1Н имеет основное состояние с конечной энергией E_{0+}, величина которой (и всех четных невырожденных уровней энергии) определяется автомодельными граничными условиями ($E_{n+}\sim e^2$), содержащими одну произвольную постоянную D [2]. Четные уровни E_{n+} находятся из характеристического уравнения [2]

$$g(q)=\ln q-(2q)^{-1}-\psi(q)-\pi\operatorname{ctg}\pi q=D,\quad 0<q<\infty,\quad -\infty<D<\infty,$$

$$E_{n+}=-\frac{1}{4q_n^2},\quad E_{n-}=-\frac{1}{4(n+1)^2},$$

$$E_{n+}<E_{n-}<E_{(n+1)+},\quad n=0,\ 1,\ 2\ldots, \tag{2}$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции, $n<q_n<n+1$ — корни уравнения (2). При $q\gg 1$

$$g(q)=-\pi\operatorname{ctg}\pi q+\frac{1}{12q^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим радиационные переходы между уровнями 1Н противоположной четности. В нашей модели ширины уровней относительно спонтанных переходов конечны в отличие от нефизичной модели 1Н [3, 5], в которой любое четное состояние мгновенно высвечивается за счет дипольного перехода в «падающее» основное состояние ($E_0\to-\infty$ [3—5]).

Вероятности переходов $(m_\pm)\to(n_\mp)$ находятся по известным правилам [6] с помощью матричных элементов

$$x_{m\pm,n\mp}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{m\pm}x\psi_{n\mp}\,dx,\quad n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

где $\psi_{m\pm}$ — нормированные собственные функции четных (+) и нечетных (—) состояний. Функции $\psi_{n-}(x)$ совпадают с радиальными кулоновскими функциями [7, с. 140—150] ($l=0$, $n\to n-1$). Функции $\psi_{n+}(x)$ даются формулой

$$\psi_{n+}=N_n x\exp\left\{-\frac{x}{2q^n}\right\}U\left(1-q_n,\ 2,\ xq_n^{-1}\right), \tag{5}$$