

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

КЛАССИЧЕСКИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

П. В. Карабут, Ю. В. Чугреев

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий; НИИЯФ)

Рассмотрены классические гравитационные эффекты (отклонение луча света, временная задержка радиосигнала, смещение перигентра орбиты спутника) в поле керр-ньюменовского источника в релятивистской теории гравитации. Получены точные выражения для величин эффектов и их постньютоновские асимптотики.

Для величин трех классических гравитационных тестов — отклонения луча света, смещения перигентра спутника, временной задержки радиосигнала — были получены точные выражения для случая сферически-симметричного источника гравитационного поля в РТГ [1, 2]. В работах [3—5] было найдено точное решение РТГ типа Керра—Ньюмена, для электрически заряженного вращающегося тела. В настоящей работе для этого решения проведен расчет трех классических гравитационных экспериментов. На основе точных выражений получены постньютоновские асимптотики этих эффектов.

Решение уравнений РТГ [3] строится в результате преобразования метрики Керра—Ньюмена в координатах Бойера—Линдквиста [6] к метрике в координатах пространства Минковского (x, y, z, t) :

$$\begin{aligned} x &= A(r, \theta) \cos \varphi + B(r, \theta) \sin \varphi, \quad z = (r-m) \cos \theta + Q(r, \theta), \\ y &= A(r, \theta) \sin \varphi - B(r, \theta) \cos \varphi, \quad t = t_{BL}, \end{aligned} \quad (1)$$

где A, B, Q — функции координат Бойера—Линдквиста (БЛ), которые выражаются через стандартные спецфункции:

$$\begin{aligned} A(r, \theta) &= [(r-m) \cos \vartheta - a \sin \vartheta] \sin \theta + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \{a_l \operatorname{Im} (\Gamma(\lambda + l + 1) P_l^{\lambda}(\xi)) + a_l^+ \operatorname{Re} Q_l^{-\lambda}(\xi)\} P_l^1(\cos \theta), \\ B(r, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} \{b_l \operatorname{Im} (\Gamma(\lambda + l + 1) P_l^{\lambda}(\xi)) + b_l^+ \operatorname{Re} Q_l^{-\lambda}(\xi)\} P_l^1(\cos \theta), \\ Q(r, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} q_{2l-1} Q_{2l-1}(\xi) P_{2l-1}(\cos \theta), \\ \xi &= -\frac{r-m}{\mu}, \quad \mu = (m^2 - a^2 - q^2)^{1/2}, \quad \lambda = ia/\mu, \\ \vartheta &= \frac{a}{2\mu} \ln \frac{r-r_+}{r-r_-}, \quad r_{\pm} = m \pm \mu, \end{aligned}$$

m, q, am — масса, заряд, момент вращения источника; a_l, a_l^+, b_l, b_l^+ ,

q_i — произвольные действительные константы, которые по порядку величины не превышают m .

Множество решений (1) содержит два важных частных случая. При $a=0$ мы получаем решение, представленное в работе [7]:

$$t=t_{BL}, \quad \varphi_0=\varphi, \quad \theta_0=\theta,$$

$$R=r-m+C_1 \left[\frac{r-m}{2\mu} \ln \frac{r-r_+}{r-r_-} + 1 \right],$$

где (R, θ_0, φ_0) — сферические координаты пространства Минковского, $C_1=q_1=a_1$. Другое решение, полученное в [3, 5], обладает свойством взаимной однозначности преобразования координат во всей области вне горизонта ($r>r_+$). Как было показано в [3], такому требованию удовлетворяет единственное решение, которое определяется преобразованием

$$\begin{aligned} R^2 &= (r-m)^2 + a^2 \sin^2 \theta, \quad \theta_0 = \arctg \left[\frac{\sqrt{(r-m)^2 + a^2}}{r-m} \operatorname{tg} \theta \right], \\ \varphi_0 &= \varphi + \nabla - \omega + \pi/2, \quad \omega = \arctg (r-m)/a, \\ r &> r_+, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (2)$$

При $q=0$ из (2) мы получаем решение РТГ, найденное в [8] для керровского источника.

1. Уравнения движения

Уравнения геодезического движения запишем в координатах пространства Минковского:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{pq}^i \frac{dx^p}{ds} \frac{dx^q}{ds} = 0, \quad x^i = (t, R, \theta_0, \varphi_0).$$

Решения этих уравнений будут зависеть от констант преобразования (1). В общем виде его можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\sigma} &= \frac{\partial R}{\partial r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\sigma}, \quad \frac{d\theta_0}{d\sigma} = \frac{\partial \theta_0}{\partial r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\sigma}, \\ \frac{d\varphi_0}{d\sigma} &= \frac{d\varphi}{d\sigma} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \frac{dr}{d\sigma} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\sigma}, \\ \frac{dt}{d\sigma} &= [(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta - Ja(2mr - q^2)] \Delta^{-1} \rho^{-2}, \\ \frac{dr}{d\sigma} &= \pm [(r^2 + a^2 - aJ)^2 - \Delta(k^2 + Er^2)]^{1/2} \rho^{-2}, \\ \frac{d\theta}{d\sigma} &= [k^2 - Ea^2 \cos^2 \theta - (a \sin \theta - J/\sin \theta)^2]^{1/2} \rho^{-2}, \\ \frac{d\varphi}{d\sigma} &= [a(2mr - q^2) - a^2 J + \Delta J \sin^{-2} \theta] \Delta^{-1} \rho^{-2}, \\ \Delta &= (r-r_-)(r-r_+), \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где E, J, k — постоянные интегрирования. Далее все эффекты будут рассматриваться в экваториальной плоскости ($\theta_0 = \theta = \pi/2$). В этом случае $k^2 = (a-J)^2$. Для фотонов $E=0$.

2. Отклонение луча света и радиоволн

Используя уравнения (3) в экваториальной плоскости, легко получить выражение для величины эффекта отклонения луча света, поступающего из удаленных областей и проходящего на минимальном расстоянии R_0 мимо источника (начало отсчета сферической системы координат совмещено с центром источника):

$$\Delta\varphi_0 = \pi + \delta\varphi_0 = 2 \int_0^{1/d} \frac{A(u) du}{D(u) [B(u)]^{1/2}}, \quad (4)$$

где

$$\frac{A(u)}{D(u)} = \frac{J - 2m(J-a)u + q^2(J-a)u^2}{1 - 2mu + (a^2 + q^2)u^2} = \frac{A_+}{u - u_+} + \frac{A_-}{u - u_-} + C,$$

A_+ , A_- , C — константы,

$$B(u) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{-1} (\alpha_1 - u) (\alpha_2 - u) (\alpha_3 - u) (\alpha_4 - u),$$

$$\alpha_1 = r_2^{-1} > \alpha_2 = d^{-1} > 0 > \alpha_3 = r_4^{-1} > \alpha_4 = r_3^{-1}.$$

Константы r_2 , r_3 , r_4 являются корнями уравнения

$$r^3 + dr^2 + \frac{d^3(k_0 - 2Md)}{d^2 - 2Md + k_0} r + \frac{k_0 d^3}{d^2 - 2Md + k_0} = 0, \quad (5)$$

где

$$k_0 = q^2 \frac{(a-J)^2}{J^2 - a^2}, \quad M = m \frac{(a-J)^2}{J^2 - a^2}, \quad J^2 - a^2 = d^4 / (d^2 - 2Md + k_0).$$

Квадратура (4) вычисляется через эллиптические интегралы:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_0 = \pi + \delta\varphi_0 = & 4 \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}{\alpha_{31} \alpha_{42}} \right)^{1/2} \left\{ \frac{A_+ \alpha_{43}}{(u_+ - \alpha_4)(u_+ - \alpha_3)} \times \right. \\ & \times \left[\Pi \left(\frac{\pi}{2}, C_+, v \right) - \Pi(\psi_0, C_+, v) \right] + \\ & + \frac{A_- \alpha_{43}}{(u_- - \alpha_4)(u_- - \alpha_3)} \left[\Pi \left(\frac{\pi}{2}, C_-, v \right) - \Pi(\psi_0, C_-, v) \right] + \\ & \left. + \frac{A(\alpha_4)}{D(\alpha_4)} \left[F \left(\frac{\pi}{2}, v \right) - F(\psi_0, v) \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\alpha_{ih} = \alpha_h - \alpha_i,$$

где

$$\sin^2 \psi_0 = \frac{\alpha_{42} \alpha_3}{\alpha_4 \alpha_{32}}, \quad C_{\pm} = - \frac{\alpha_{32} (u_{\pm} - \alpha_4)}{\alpha_{42} (u_{\pm} - \alpha_3)}, \quad v^2 = \frac{\alpha_{41} \alpha_{32}}{\alpha_{42} \alpha_{31}}.$$

Величина d связана с R_0 преобразованием (1), если считать, что $r = d$, $\theta = \pi/2$. Раскладывая точные выражения (1), (6) для достаточно больших R_0 , получаем в постньютоновском приближении

$$\delta\varphi_0 = \frac{4m}{R_0} + \frac{4m^2}{R_0^2} \left(\frac{15\pi}{16} - 2 \right) \pm \frac{4am}{R_0^2} - \frac{3}{4} \frac{\pi q^2}{R_0^2} + \dots$$

3. Временная задержка радиосигнала

Время распространения электромагнитного сигнала в поле керр-ньюменовского источника от точки (R_e, φ_{0e}) до точки, ближайшего прохождения R_0 можно найти из уравнений движения:

$$t(R_e, R_0) = \int_d^{r_e} \frac{[(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta - Ja(2mr - q^2)] dr}{\Delta [(r-d)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)]^{1/2}} = \sum_{j=0}^4 A_j I_j(r_e).$$

Это выражение имеет смысл только в области взаимнооднозначного соответствия координат, связанных преобразованием (1). Тогда время распространения сигнала от точки (R_e, φ_{0e}) до точки $(R_\mu, \varphi_{0\mu})$, когда $\varphi_{0e} - \varphi_{0\mu} \cong \pi$, равно

$$t(R_e, R_\mu) = t(R_e, R_0) + t(R_\mu, R_0) = \sum_{j=0}^4 A_j (I_j(r_e) + I_j(r_\mu)),$$

где

$$\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta - Ja(2mr - q^2)}{\Delta} = \frac{A_4}{r-r_-} + \frac{A_3}{r-r_+} + A_2 + A_1 r + A_0 r^2,$$

$$I_4(r) = I_-, \quad I_3(r) = I_+,$$

$$I_\pm = \tilde{\mu} \left\{ \frac{1}{r_2 - r_\pm} F(\psi, v) - \frac{r_{21}}{(r_2 - r_\pm)(r_1 - r_\pm)} \Pi(\psi, C_\pm, v) \right\},$$

$$\tilde{\mu} = \frac{2}{(r_{12} r_{42})^{1/2}}, \quad C_\pm = -\frac{r_{41}(r_2 - r_\pm)}{r_{42}(r_1 - r_\pm)}, \quad v^2 = \frac{r_{41} r_{32}}{r_{42} r_{31}}, \quad r_{ik} = r_k - r_i,$$

$$I_2 = \tilde{\mu} F(\psi, v), \quad \psi = \arcsin \left[\frac{r_{42}(r - r_1)}{r_{41}(r - r_2)} \right]^{1/2},$$

$$I_1 = \tilde{\mu} \left[r_2 F(\psi, v) + r_{21} \Pi\left(\psi, -\frac{r_{41}}{r_{42}}, v\right) \right],$$

$$I_0 = \tilde{\mu} r_{21} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ (pr_1 - 1)^{-1} (pr_2 - 1)^{-1} \Pi \times \right. \\ \left. \times \left(\psi, -\frac{r_{41}}{r_{42}} \frac{(pr_2 - 1)}{(pr_1 - 1)}, v \right) \right\} \Big|_{p=0} + \tilde{\mu} r_2^2 F(\psi, v), \quad r_1 \equiv d.$$

Константы r_2, r_3, r_4 находятся из уравнения (5), а r_e, r_μ выражаются из (1) через R_e, R_μ . Тогда для времени задержки имеем точное выражение:

$$\Delta t(R_e, R_\mu) = t(R_e, R_\mu) - t(R_e, R_\mu)|_{a,m,q=0}. \quad (7)$$

Вдали от источника из (6), (7) получаем с постньютоновской точностью:

$$\Delta t = 2m \ln \frac{4R_e R_\mu}{R_0^2} + 4m - \left(mR_0 - \frac{3}{2} q^2 \right) (R_e^{-1} + R_\mu^{-1}) - \frac{3\pi q^2}{2R_0} \mp \frac{8am}{R_0} + \dots$$

4. Смещение перицентра спутника

При движении незаряженного массивного тела в поле керр-ньюменовского источника выражение для величины эффекта смещения пе-

рицентра его эллиптической орбиты имеет следующий вид в области взаимной однозначности преобразования (1):

$$\delta\varphi_0 = 2[\varphi_0(R_1) - \varphi_0(R_2)] - 2\pi = 2\Delta\varphi_0 - 2\pi,$$

$$\varphi_0(R_1) - \varphi_0(R_2) = (E-1)^{-1/2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{[a(2mr - q^2) - a^2J + \Delta J] dr}{\Delta[(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)]^{1/2}}. \quad (8)$$

Связь R_1, R_2 — точек поворота по азимутальному углу, для которых $d\varphi_0/dR=0$ — с параметрами r_1, r_2 дается соотношением (1). Величины E, J определяются из уравнений

$$E = \frac{[r_1^2 + a(a-J)]^2}{\Delta(r_1)r_1^2} = \frac{(a-J)^2}{r_1^2} = \frac{[r_2^2 + a(a-J)]^2}{\Delta(r_2)r_2^2} = \frac{(a-J)^2}{r_2^2}.$$

Тогда r_3 и r_4 — корни квадратного уравнения

$$r^2 + \left(r_1 + r_2 + \frac{2mE}{1-E}\right)r + r_1^2 + r_2^2 + \frac{(2m(r_1 + r_2) - a^2 - q^2)E + a^2 - J^2}{1-E} = 0.$$

Интеграл (8) сводится к эллиптическим

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\tilde{\mu}}{(E-1)^{1/2}} \left\{ JF\left(\frac{\pi}{2}, v\right) + r_{23} \left[\frac{A_-}{(r_3 - r_-)(r_4 - r_-)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, C_-, v\right) + \frac{A_+}{(r_3 - r_+)(r_4 - r_+)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, C_+, v\right) \right] \right\}, \quad (9)$$

где

$$C_{\pm} = -\frac{r_{23}}{r_{31}} \frac{(r_3 - r_{\pm})}{(r_2 - r_{\pm})}, \quad v^2 = \frac{r_{43}r_{12}}{r_{13}r_{42}}, \quad \tilde{\mu} = 2(r_{31}, r_{42})^{-1/2},$$

$$\frac{A_+}{r - r_+} + \frac{A_-}{r - r_-} = \frac{a(2mr - q^2) - a^2J}{\Delta}.$$

Постньютоновское приближение для величины эффекта строится из (9):

$$\delta\varphi_0 = \frac{6\pi m}{p} + \frac{15\pi m^2}{p^2} \left(1 - \frac{7}{10} \varepsilon^2\right) - \frac{\pi q^2}{mp} - \frac{10\pi q^2}{p^2} \pm$$

$$\pm 8\pi \left(\frac{m}{p^3}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{6m}{p} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right] + \dots,$$

где

$$p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \varepsilon = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$$

Полученные точные выражения для величин трех гравитационных эффектов в РТГ позволяют провести расчеты с любой необходимой точностью. Насколько эти результаты отличаются от предсказаний ОТО? При ответе на этот вопрос необходимо следовать методологии сравнения предсказаний для гравитационных экспериментов в ОТО и РТГ, которая подробно излагается в работах [1, 2, 9]. При заданной арифметизации пространства ОТО не может дать однозначных предсказаний для гравитационных эффектов, причем на примере эффекта

временной задержки радиосигнала в [2] показано, что эта неоднозначность не устраняется даже при выражении величины эффекта через физически наблюдаемые величины. С другой стороны, ряд авторов [10] приводят оценки для величин эффектов в ОТО. Если сравнивать эти результаты с полученными выше, то можно убедиться, что для эффекта временной задержки радиосигнала различие сказывается уже на поправках первого порядка по гравитационной постоянной G , а для двух других эффектов — на поправках второго порядка по G .

В заключение следует отметить, что все выражения для этих трех классических гравитационных тестов получены в области взаимной однозначности преобразования (1). Как видно из постньютоновских асимптотик эффектов, зависимость метрики от неопределенных констант $a_i, a_i^+, b_i, b_i^+, q_i$ сказывается лишь в постньютоновском и более высоких приближениях. Величины этих констант должны определяться из условия сшивки внутреннего решения с внешним. В сильном керр-ньюеновском поле эти константы могут давать существенный вклад в величины рассмотренных выше эффектов.

Авторы выражают благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1986. [2] Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Мествиришвили М. А. // УФН. 1988. 155, № 3. С. 369. [3] Карабут П. В., Чугреев Ю. В. // ТМФ. 1989. 79, № 3. С. 394. [4] Карабут П. В., Чугреев Ю. В. // Точные решения уравнений Эйнштейна и их физическая интерпретация. Тарту, 1988. С. 79. [5] Карабут П. В., Чугреев Ю. В. // ТМФ. 1989. 78, № 2. С. 305. [6] Newman E. T. et al. // J. Math. Phys. 1965. 6, N 6. P. 918. [7] Выблй Ю. П. // Точные решения уравнений Эйнштейна и их физическая интерпретация. Тарту, 1988. С. 74. [8] Власов А. А., Логунов А. А. // ТМФ. 1987. 70, № 2. С. 171. [9] Логунов А. А., Лоскутов Ю. М., Чугреев Ю. В. // ТМФ. 1986. 69, № 3. С. 328. [10] Иваничка О. С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновской теории тяготения. Минск, 1979.

Поступила в редакцию
24.02.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 2

УДК 539.172

О ВКЛАДЕ ХИГГСОВСКОГО СЕКТОРА В ПОПЕРЕЧНЫЙ ФОРМФАКТОР И АНОМАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. М. Лоскутов, В. В. Скобелев

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В однопетлевом приближении рассчитан вклад лидирующих диаграмм с хиггсовскими бозонами в формфакторы вершины ($\epsilon\epsilon\gamma$) и в аномальный магнитный момент электрона в магнитном поле B . Отмечено, что при $B \rightarrow 0$ диаграмма с электронной петлей дает нулевой результат. Вклад хиггсовской диаграммы, топологически идентичной диаграмме КЭД, при $B=0$ и значении $M \sim 6$ ГэВ равнозначен по порядку шестипетлевым диаграммам КЭД.

Исследование вакуумных радиационных поправок к операторам и наблюдаемым в рамках квантовой электродинамики (КЭД) имело принципиальное значение для становления ее как законченной физической теории, описывающей электрон-фотонное взаимодействие. Эффек-