УДК 539.17.01

ОПИСАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СОСТОЯНИЙ ГЕЛИЕПОДОБНЫХ ИОНОВ

В. В. Комаров, А. М. Попова, В. Г. Айрапетян

(НИИЯФ)

Предложен метод построения областей локализации резонансов гелиеподобных ионов. Получена верхняя оценка полуширины резонансов в системе. Показано, что резонансы в гелиеподобных ионах накапливаются у вещественных порогов.

Изучению спектральных свойств оператора энергии атомных систем посвящено много работ. Известен следующий общий результат: дискретный спектр оператора Шрёдингера системы из N электронов в поле ядра с зарядом Z конечен при условии $Z \leqslant N-1$ и бесконечен при $Z > N-1$ [1]. В применении к нашему случаю $N=2$ это означает, что отрицательный ион водорода ($Z=1$) имеет конечный дискретный спектр (состоящий из одной точки — основного состояния [2]), и все остальные двухэлектронные ионы имеют бесконечный дискретный спектр, причем точки дискретного спектра накапливаются к началу непрерывного спектра [3].

В то же время свойства резонансных состояний рассматриваемых систем изучены не так полно. Например, остается открытым вопрос: имеют ли резонансы в гелиеподобных ионах точки накопления, и если да, то какие именно? В настоящей работе мы показываем, что, во-первых, сгущение резонансов в двухэлектронных ионах имеет место, и, во-вторых, точками накопления резонансов являются вещественные пороги системы. Гамильтониан гелиеподобного иона в приближении бесконечной массы ядра и без учета релятивистских эффектов имеет вид (в атомных единицах)

$$H = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z}{r_2} + \frac{1}{r_{12}} = H_0 + V;$$
$$H_0 = h_1 + h_2;\ h_i = -\frac{1}{2}\Delta_i - \frac{Z}{r_i}\ (i=1,2);\ V = \frac{1}{r_{12}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_i \in \mathbf{R}^3$ — радиус-векторы электронов относительно ядра с зарядом Z, $r_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$; Δ_i — лапласиан, действующий по координатам соответствующего электрона ($i=1,2$).

Оператор H_0 имеет собственные значения $E_{n_1 n_2} = \left\{ -\frac{Z^2}{2n_1^2} - \frac{Z^2}{2n_2^2} \right\}_{n_1, n_2 = 1}^{\infty}$, а весь его спектр имеет вид [3]

$$\sigma(H_0) = \left\{ -\frac{Z^2}{2} - \frac{Z^2}{2n^2} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left[-\frac{Z^2}{2}, \infty \right) = \sigma_{\mathrm{disc}}(H_0) \cup \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0).$$

Таким образом, собственные значения $E_{n_1 n_2}$ при $n_1 \geqslant 2$, $n_2 \geqslant 2$ лежат в непрерывном спектре, и наша задача состоит в изучении поведения этих «утопленных» в непрерывном спектре собственных значений при включении $V = 1/r_{12}$ и определении параметров резонансов, порожденных ими [3]. Для решения этой задачи нельзя применить обычную теорию возмущений, поскольку, во-первых, невозмущенное собственное значение лежит в непрерывном спектре, и, во-вторых, возмущенное собственное значение не лежит на действительной оси. Однако

разработан метод (метод комплексных масштабных преобразований [3—8]), позволяющий обойти указанные трудности. Мы исходим из общепринятого определения резонанса как полюса аналитического продолжения резольвенты оператора Шрёдингера системы $G(z)=(z-H)^{-1}$ на второй (нефизический) лист энергии [3—6]. В [3] с помощью метода масштабных преобразований показано, что при включении взаимодействия между электронами собственные значения $E_{n_1n_2}(n_1, n_2 \geqslant 2)$ оператора H_0 переходят на второй лист энергии, становясь при этом полюсами резольвенты $G^{(\theta)}(z)=(z-H(\theta))^{-1}$ несамосопряженного оператора $H(\theta)$ (θ — комплексный параметр масштабного преобразования), полученного из гамильтониана системы (1) в результате масштабного преобразования, т. е. резонансными полюсами. Таким образом, метод масштабных преобразований позволяет свести проблему определения значений резонансных параметров к задаче о возмущении собственных значений несамосопряженного оператора $H_0(\theta)$ при включении взаимодействия $V(\theta)$.

Первым этапом на пути к решению поставленной задачи является определение области локализации резонансов изучаемой системы на втором листе энергии. Для этого мы используем метод комплексных масштабных преобразований [3—8]. Определим однопараметрическую группу $U(\theta)$ унитарных преобразований пространства $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^6)$ согласно формуле

$$(U(\theta)f)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\exp\{3\theta\}, \ f(\exp\{\theta\}\mathbf{r}_1, \ \exp\{\theta\}\mathbf{r}_2).$$

При этом оператор H_0 преобразуется как

$$H_0(\theta)=U(\theta)H_0U^{-}(\theta)=\exp\{-2\theta\}\left(-\frac{1}{2}\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_2\right)+$$

$$+\exp\{-\theta\}\left(-\frac{Z}{r_1}-\frac{Z}{r_2}\right),$$

а взаимодействие между электронами — как $V(\theta)=U(\theta)VU^{-1}(\theta)=\exp\{-\theta\}V$. Спектр оператора $H_0(\theta)$ имеет вид [3]

$$\sigma(H_0(\theta))=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{Z^2}{2n^2}+\lambda\exp\{-2\theta\} \mid \lambda\geqslant 0\right\} \cup$$

$$\cup\left\{-\frac{Z^2}{2n_1^2}-\frac{Z^2}{2n_2^2}\right\}_{n_1,n_2=1}^{\infty} \cup \{\lambda\exp\{-2\theta\} \mid \lambda\geqslant 0\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что собственные значения $E_{n_1n_2}$ «утопленные» в $\sigma_{ess}(H_0)$, при комплексных θ становятся изолированными собственными значениями.

Прежде, чем переходить к построению области локализации резонансов, отметим, что кулоновские потенциалы являются аналитическими относительно масштабных преобразований в области $0\leqslant\operatorname{Im}\theta<\pi/2$ [3] и что такие аналитические свойства позволяют сразу ограничить область расположения резонансов в системах с парными кулоновскими силами следующими условиями: $E_R=\operatorname{Re}z\leqslant 0$, $(1/2)\Gamma=\operatorname{Im}z\leqslant 0$ [7, 8].

Итак, рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$H(\theta)\Psi(\theta)=z\Psi(\theta), \qquad (2)$$

причем параметр масштабного преобразования выберем чисто мнимым: $\theta=i\rho$, $0\leqslant\rho<\pi/2$. Оператор $H(\rho)$ имеет вид

$$H(\rho)=\exp\{-2i\rho\}\left(-\frac{1}{2}\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_2\right)+$$

$$+\exp\{-i\rho\}\left(-\frac{Z}{r_1}-\frac{Z}{r_2}+\frac{1}{r_{12}}\right). \qquad (3)$$

Без ограничения общности функцию $\Psi(\rho)$ можно считать нормированной на единицу. Тогда из (2) с учетом (3) получим

$$\langle\Psi(\rho)|-\frac{1}{2}\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_2+\exp\{-i\rho\}\left(-\frac{Z}{r_1}-\frac{Z}{r_2}+\frac{1}{r_{12}}\right)\times$$

$$\times\ |\Psi(\rho)\rangle=\exp\{2i\rho\}\,z. \qquad (4)$$

Выделяя в (4) действительную и мнимую части, получим

$$\langle\Psi(\rho)|-\frac{1}{2}\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_2+(\cos\rho-\lambda\sin\rho)\left(-\frac{Z}{r_1}-\frac{Z}{r_2}+\frac{1}{r_{12}}\right)|\Psi(\rho)\rangle=$$

$$=\mathrm{Re}\,(\exp\{2i\rho\}\,z)-\lambda\,\mathrm{Im}\,(\exp\{2i\rho\}\,z), \qquad (5)$$

где λ — произвольный положительный параметр, а параметр ρ может быть выбран сколь угодно близким к $\pi/2$. Записывая z в виде $z=x+iy$, $x\leqslant 0$, $y\leqslant 0$ и устремляя в (5) ρ к $\pi/2$, получим

$$-x+\lambda y\geqslant\lim_{\rho\to\pi/2}\langle\Psi(\rho)|-\frac{1}{2}\Delta_1-\frac{1}{2}\Delta_2+(\cos\rho-\lambda\sin\rho)\frac{1}{r_{12}}|\Psi(\rho)\rangle\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{\rho\to\pi/2}\langle\Psi(\rho)|-\Delta_{12}-(\lambda\sin\rho-\cos\rho)\frac{1}{r_{12}}|\Psi(\rho)\rangle\geqslant$$

$$\geqslant\lim_{\rho\to\pi/2}\left[-\frac{1}{4}(\lambda\sin\rho-\cos\rho)^2\right]=-\frac{\lambda^2}{4}, \qquad (6)$$

где $-\Delta_{12}$ — оператор кинетической энергии относительного движения электронов. В последнем неравенстве (6) использовано то обстоятельство, что основное состояние $-\Delta-\lambda/r$ есть $-\lambda^2/4$. Огибающая однопараметрического семейства кривых $-x+\lambda y=-\Delta^2/4$ есть парабола $x=-y^2$ [9]. Следовательно, параметры резонансов в системе удовлетворяют неравенству

$$x\leqslant -y^2, \qquad (7)$$

т. е. все резонансы расположены в области второго листа, ограниченной отрицательной действительной полуосью и параболой $x=-y^2$. Попутно заметим, что из (7) сразу следует верхняя оценка на полуширины резонансов в двухэлектронных ионах: поскольку $\sigma_{ess}(H)=[-z^2/2, \infty)$, то для всех резонансов $\Gamma/2\leqslant|z|/\sqrt{2}$. Отметим также, что вышеизложенный метод построения области локализации резонансов аналогичен методу, примененному в [10, гл. 12].

Следующий этап нашего исследования заключается в изучении вопроса о сгущении резонансов. Собственные значения $E_{n_1n_2}=-\frac{Z^2}{2n_1^2}-\frac{Z^2}{2n_2^2}$ $(n_1,\ n_2\geqslant 2)$ оператора H_0 сгущаются к вещественным порогам системы, т. е. $E_{n_1n_2}\to-\frac{Z^2}{2n_1^2}$ при $n_2\to\infty$. Возникает естественный вопрос, продолжают ли резонансы, порожденные собственными значениями $E_{n_1n_2}$ при включении V, накапливаться у вещественных порогов.

Зафиксируем один из электронов в состоянии с главным квантовым числом $n_1 \geqslant 2$, а второй поместим в состояние $n_2 \gg n_1$. Последнее условие позволяет определить отношение длин радиус-векторов электронов в виде малого параметра $\varepsilon \equiv r_1/r_2 \ll 1$. Отметим, что параметр ε наиболее просто выражается в случае так называемых «круговых орбит», соответствующих орбитальным квантовым числам $l_1 = n_1 - 1$, $l_2 = n_2 - 1$ [11]: боровские радиусы этих орбит $r_1 = n_1^2/Z$, $r_2 = n_2^2/Z$, и, следовательно, $\varepsilon = n_1^2/n_2^2$.

Включение взаимодействия между электронами приводит к снятию вырождения у выбранного собственного состояния оператора H_0 с энергией $E_{n_1 n_2}$, т. е. оно порождает не один, а серию резонансов. Не ограничивая общности рассмотрения, дальше, не изменяя обозначений, будем считать собственное значение $E_{n_1 n_2}$ невырожденным, поскольку всегда можно провести редукцию и разложить гильбертово пространство состояний системы в прямую сумму подпространств невырожденных состояний [3, 6].

Ясно, что расположение резонансов на втором листе должно зависеть от выбора n_1 и n_2. Покажем, что это действительно так. Запишем гамильтониан (1) в следующем виде:

$$H = \tilde{H}_0 + \tilde{V};\ \tilde{H}_0 = -\frac{1}{2}\Delta_1 - \frac{1}{2}\Delta_2 - \frac{Z}{r_1} - \frac{Z-1}{r_2};$$
$$\tilde{V} = \left(1 - \frac{r_{12}}{r_2}\right)\frac{1}{r_{12}}. \tag{8}$$

Учитывая, что $r^2_{12} = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\varphi$, где $\varphi = (\widehat{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2})$, а также вспомнив определение ε, для потенциала $\tilde{V}$ получим $\tilde{V} = \beta/r_{12}$, где $\beta = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2}$ — параметр, меняющийся в интервале $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Повторяя цепь рассуждений (2)—(7) в применении к гамильтониану (8) с наибольшим значением β ($\beta = \varepsilon$), получим следующее условие на параметры резонансов, порожденных собственным значением $E_{n_1 n_2}$:

$$x_{n_1 n_2} \leqslant -\frac{1}{\varepsilon^2} y^2_{n_1 n_2}. \tag{9}$$

Теперь мы готовы к доказательству основного результата работы.

Теорема. Резонансы, порожденные «утопленными» в непрерывном спектре собственными значениями оператора H_0, при фиксированном n_1 и $n_2 \to \infty$ накапливаются у вещественного порога $E_{n_1\infty} = -Z^2/(2n_1^2)$.

Доказательство: Развивая в (8) теорию возмущений Рэлея—Шрёдингера [3] по $\tilde{V} = \beta/r_{12}$, для положения резонанса на втором листе получим аналитический ряд

$$z_{n_1 n_2} = -\frac{Z^2}{2n_1^2} - \frac{(Z-1)^2}{2n_2^2} + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots,$$

причем коэффициент a_1 вещественен. Следовательно, для каждого $n_1 \geqslant 2$ всегда существует такое $N_2 < \infty$, что для всех $n_2 > N_2$ резонанс $z_{n_1 n_2}$ заведомо попадает в полукруг с центром в точке $E_{n_1\infty} = -Z^2/(2n_1^2)$ и радиусом $R(\varepsilon)$, конец которого проходит через точку параболы (9), имеющей абсциссу $E_{n_1 n_2}$, т. е. $R(\varepsilon) = [(E_{n_1\infty} - E_{n_1 n_2})^2 + \varepsilon^2 |E_{n_1 n_2}|]^{1/2}$. Легко видеть, что $\lim\limits_{n_2 \to \infty} R(\varepsilon) = 0$, так как при $n_2 \to \infty$ $\varepsilon \to 0$, а $E_{n_1 n_2} \to E_{n_1\infty}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Яфаев Д. Р.//Функциональный анализ и его приложения. 1972. 6, № 4. С. 103. [2] Hill R. N.//Phys. Rev. Lett. 1977. 38, N 12. P. 643. [3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М., 1982. [4] Howland J. S.//Pacific J. Math. 1969. 29. P. 565. [5] Lovelace C.// //Strong Interactions and High Energy Physics/Ed. R. C. Moorehouse. Oliver and Boyd, 1964. [6] Simon B.//Ann. Math. 1973. 97. P. 247. [7] Hunziker W.//Acta Phys. Austr., Suppl. 1977. 17. P. 43. [8] Simon B.//Int. J. Quant. Chem. 1978. 14. P. 529. [9] Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М., 1969. [10] Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М., 1969. [11] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч. Квантовая механика. М., 1979.

Поступила в редакцию
23.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 2

УДК 539.12.01

ЖЕСТКОЕ РОЖДЕНИЕ ОЧАРОВАННЫХ КВАРКОВ

А. П. Крюков, Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассматривается процесс рождения очарованных частиц в протон-протонном столкновении. Приводятся результаты аналитических вычислений на ЭВМ сечения главного подпроцесса — глюон-глюонного рождения очарованной пары кварков. Показывается, что основной вклад в сечение дают диаграммы третьего порядка теории возмущений.

В настоящее время как в теоретическом, так и в экспериментальном плане интенсивно изучается процесс рождения очарованных частиц в адронных взаимодействиях. Расчеты [1—3] в рамках КХД в низшем порядке теории возмущений довольно плохо согласуются с экспериментом.

В данной работе показывается, что согласие между теоретическими и экспериментальными результатами значительно улучшается при учете следующего (третьего) порядка по эффективной константе взаимодействия α_S. Практически такие расчеты осуществимы только на ЭВМ. Сейчас уже имеется несколько работ [4—7], в которых сообщается о такой деятельности. В отличие от них мы помимо константы α_S использовали еще один параметр малости и выделили главный вклад по этому параметру. В результате возникли очень большие упрощения и нам удалось получить сравнительно компактное аналитическое выражение для сечения подпроцесса рождения очарованных кварков.

Здесь приводятся результаты наших расчетов на ЭВМ в системе аналитических вычислений *REDUCE* [8] сечения глюон-глюонного рождения очарования ($gg \to C\bar{C}g$). Этот подпроцесс дает основной вклад в сечение рождения очарованных частиц в протон-протонном столкновении. Ранее в работе [9] такого типа результаты были получены для глюон-кваркового рождения очарования.

Типичные диаграммы Фейнмана, ответственные за глюон-глюонное рождение очарования, изображены на рис. 1. Формально диаграммы второго порядка (рис. 1, *а*) соответствуют случаю, когда в конечном состоянии присутствуют только два партона. Однако в силу того, что глюоны имеют нулевую массу, этот процесс физически неотделим от