УДК 531.51

ПОСТНЬЮТОНОВСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ДВИЖЕНИИ ДВУХ ТЕЛ СРАВНИМЫХ МАСС

В. И. Денисов, В. Г. Турышев

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

В рамках расширенного варианта параметризованного постньютоновского формализма изучается движение двойных систем, состоящих из самогравитирующих тел сравнимых масс. Показано, что динамические характеристики движущихся тел существенно зависят от нового параметра τ. Обсуждается возможный способ оценки величины этого параметра при обработке наблюдательных данных, полученных при изучении пульсарной системы PSR1913+16.

Как известно [1], при расчете различных гравитационных эффектов в рамках параметризованного постньютоновского (ППН) формализма обычно используется так называемая стандартная ППН-калибровка, для получения которой совершается постньютоновское преобразование координат

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\xi^{\alpha}=x^{\alpha}+\lambda_2\int\rho(y,\ t)\frac{(x^{\alpha}-y^{\alpha})}{|x-y|}\,dy. \qquad (1)$$

Параметр λ_2 выбирается так, чтобы в результате преобразования (1) недиагональные компоненты пространственной части метрики эффективного риманова пространства-времени обращались в нуль. Однако это условие, при всей его математической красоте, тем не менее является далеко не безобидным с физической точки зрения. Действительно, согласно хронометрической классификации преобразование (1), явно зависящее от времени, описывает переход от исходной квазилоренцевой * системы отсчета к системе, которая движется, вообще говоря, неинерциальным образом.

Более детальный анализ показывает, что эффекты, обусловленные неинерциальностью этой системы отсчета, в ряде случаев могут проявиться уже в постньютоновском приближении. Следовательно, исходная квазилоренцева система отсчета и система, используемая в стандартном ППН-формализме, в некоторых случаях не будут физически эквивалентными, что, естественно, должно найти свое отражение в результатах соответствующих гравитационных экспериментов. Поэтому возникает задача поиска тех экспериментальных ситуаций, в которых это отличие должно проявиться в наибольшей степени. Изучению одной из таких ситуаций и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим два сферических тела, имеющих сравнимые массы ($m_1\sim m_2$) и движущихся в создаваемом ими гравитационном поле. Метрику эффективного риманова пространства-времени в исходной квазилоренцевой системе отсчета для произвольной консервативной метрической теории гравитации запишем в виде

$$g_{00}=1-2U+2(\beta+\tau)U^2-2\xi A+2(\xi+\tau)\Phi_{\omega}-2[(\gamma+1-\xi)\Phi_1+$$
$$+(3\gamma+1-2\beta+\xi+\tau)\Phi_2+\Phi_3+(3\gamma-2\xi)\Phi_4]+O(\varepsilon^6), \qquad (2)$$

---

* Квазилоренцевой мы, следуя [1], называем систему отсчета, начало которой движется равномерно и прямолинейно относительно далеких звезд.

$$g_{0\alpha}=(1/2)(4\gamma+3-2\xi+2\tau)V_\alpha+(1/2)(1+2\xi-2\tau)W_\alpha+O(\varepsilon^5),$$

$$g_{\alpha\beta}=\gamma_{\alpha\beta}(1+2(\gamma+\tau)U)+2\tau U_{\alpha\beta}+O(\varepsilon^4),$$

где γ_{mn} — галилеевский метрический тензор с сигнатурой —2, τ — некоторый новый параметр, описывающий меру неинерциальности движения стандартной ППН-системы относительно используемой нами квазилоренцевой системы отсчета, а остальные обобщенные гравитационные потенциалы и постньютоновские параметры имеют общепринятый [1] вид. Используя алгоритм, предложенный в работе [2], построим постньютоновское выражение для функции Лагранжа рассматриваемой нами двойной системы. В относительных переменных будем иметь

$$L=-\frac{mv^2}{2}\left(1+\frac{1}{4}\left(1-\frac{3m}{M}\right)v^2\right)-\frac{mM}{R}\left(1+\left(\gamma+\tau+\frac{1}{2}+\frac{m}{2M}\right)v^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{M}-2\tau\right)(n_\varepsilon v^\varepsilon)^2-\frac{1}{2}(2\beta+2\tau-1)\frac{M}{R}\right), \tag{3}$$

где $M=m_1+m_2$, $m=m_1m_2/M$, R^α — разность радиус-векторов тел, $n^\alpha=R^\alpha/R$, v^ε — относительная скорость: $v^\varepsilon=V^\varepsilon_{(1)}-V^\varepsilon_{(2)}$. Следует особо отметить, что при выводе выражения (3) и выборе трехмерных координат существенно использовалось соотношение $m_1/m_2\sim O(1)$, в результате чего оно оказывается неприменимым в случае, когда масса одного из тел значительно больше массы другого. Таким образом, постньютоновский параметр τ явно входит в выражение (3) и никаким переопределением других параметров не может быть из него устранен. Это означает, что параметр τ в расширенном ППН-формализме имеет независимое существование и так же, как и остальные параметры, может быть измерен в соответствующих постньютоновских экспериментах.

Составляя уравнения Лагранжа второго рода, из выражения (3) получим

$$\frac{d}{dt}v^\alpha=-\frac{M}{R}\left\{n^\alpha\left[1-2\left(\beta+\gamma+\tau+\frac{m}{M}\right)\frac{M}{R}+\left(\gamma-\tau+\frac{3m}{M}\right)v^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+3\left(\tau-\frac{m}{2M}\right)(n_\varepsilon v^\varepsilon)^2\right]+2\left(\gamma+\tau+1-\frac{m}{M}\right)(n_\varepsilon v^\varepsilon)v^\alpha\right\}. \tag{4}$$

Поступая совершенно аналогично случаю ньютоновской механики, легко показать, что траектория движения рассматриваемой двойной системы является плоской и в постньютоновском приближении.

Для аналитического исследования уравнения (4) перейдем к полярным координатам, вводимым в плоском движении. В результате будем иметь

$$\ddot{R}-R\dot{\varphi}^2=-\frac{M}{R^2}\left\{1-2\left(\beta+\gamma+\tau+\frac{m}{M}\right)\frac{M}{R}+\left(3\gamma+4\tau+2-\frac{m}{2M}\right)\dot{R}^2+\right.$$
$$\left.+\left(\gamma-\tau+\frac{3m}{M}\right)R^2\dot{\varphi}^2\right\},$$

$$R^2\dot{\varphi}\left(1+2\left(\gamma+\tau+1-\frac{m}{M}\right)\frac{M}{R}\right)=h=\mathrm{const}.$$

Отсюда легко найти дифференциальное уравнение, определяющее траекторию $R=R(\varphi)$:

$$\left(\frac{d}{d\varphi}R^{-1}\right)^2=-R^{-2}+hp^{-2}+2(MR^{-1})p^{-2}+$$
$$+\left(4+4\gamma-2\beta+6\tau-\frac{3m}{M}\right)(MR^{-1})^2p^{-2}+\left(2+2\gamma+4\tau-\frac{3m}{M}\right)\times$$
$$\times(MR^{-1})hp^{-2}+\left(\frac{m}{M}-2\tau\right)MR^{-3}+(1/4)\left(1-\frac{3m}{M}\right)(hp^{-1})^2.$$

Поскольку с экспериментальной точки зрения для нас наибольший интерес представляет случай финитного движения тел, то рассмотрим решение этого уравнения, соответствующее лишь квазиэллиптическому ($e<1$) движению — движению по эллиптической траектории с периодическим смещением перицентра орбиты:

$$R=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos N},\quad N=\psi+\left(\tau-\frac{m}{2M}\right)\frac{Me\sin\psi}{a(1-e^2)},\tag{5}$$

где $\psi=\left(1+(\beta-2-2\gamma)\dfrac{M}{a(1-e^2)}\right)(\varphi+\varphi_0)$, a — большая полуось квазиэллипса, e — его эксцентриситет, а φ_0 — постоянная интегрирования. Следует отметить, что траектория, определяемая выражением (5), представляет собой незамкнутую квазиэллиптическую кривую, перицентр которой с ростом полярного угла φ систематически смещается в область больших значений угла. За один оборот двойной системы это смещение равно

$$\delta\varphi=(2+2\gamma-\beta)\frac{2\pi M}{a(1-e^2)}.\tag{6}$$

Этот результат, как известно [1], находится в согласии с экспериментальными данными, полученными при наблюдении за движением Меркурия и Марса. Отсутствие в выражении (6) параметра τ, а также величины m/M объясняется тем, что их влияние на движение тел является знакопеременным вдоль траектории, в результате чего их вклад в смещение перицентра при совершении полного оборота в постньютоновском приближении полностью компенсируется. Однако это не значит, что влияние этих параметров на движение двойной системы является ненаблюдаемым. Для того чтобы в этом убедиться, запишем выражение для скорости одного из тел системы с постньютоновской степенью точности:

$$\mathbf{V}_{(1)}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left\{\left(1-\frac{m_1(m_1-m_2)}{2a(m_1+m_2)}\right)\frac{e\sin N}{1+e\cos N}\frac{dN}{d\varphi}\mathbf{e}_R+\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{m_1(m_1-m_2)}{2a(m_1+m_2)}\frac{e}{1-e^2}(e+\cos N)\right)\mathbf{e}_\varphi\right\}R\dot\varphi,\tag{7}$$

где выражения для R и N определяются соотношениями (5), а

$$\dot\varphi^2=\frac{Ma(1-e^2)}{R^4}\left\{1+\left(-\gamma-\tau-\frac{2m}{M}+\frac{1}{1-e^2}\left(-2\beta-2\tau+\frac{3m}{M}-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-4\left(\gamma+\tau+1-\frac{m}{M}\right)e\cos N\right)\right)\frac{M}{a}\right\}.\tag{8}$$

Подставляя выражения (5) и (8) в соотношение (7), легко убедиться, что скорость первого тела как функция полярного угла в постньютоновском приближении существенно зависит от параметра τ и отношения m/M. Наибольшее влияние на $V^\alpha_{(1)}$ эти величины оказывают в точках траектории $\varphi=-\varphi_0+(2n+1)\pi$, где n — любое целое число. В окрестности этих точек выражение (7) для скорости $V^{\alpha}_{(1)}$ принимает вид

$$\mathbf{V}_{(1)}(\varphi=-\varphi_0+(2n+1)\pi)=\frac{m_2}{((m_1+m_2)a(1-e^2))^{1/2}}\left\{A\cdot e\,\mathbf{e}_R(2+2\gamma-\beta)\times\right.$$
$$\times\frac{M}{a(1-e^2)}(2n+1)\pi+B\mathbf{e}_\varphi(1-e)\left(1+\left[-(1/2)\left(\gamma+\tau+\frac{2m}{M}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+(1-e^2)^{-1}\left(-\beta-\tau+\frac{3m}{2M}+2\left(1+\gamma+\tau-\frac{m}{M}\right)e\right)\right]\frac{M}{a}\right)\right\},\qquad(9)$$

где

$$A=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(1-\frac{m_1(m_1-m_2)}{2a(m_1+m_2)}\right),$$
$$B=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(1-\frac{m_1(m_1-m_2)}{2a(m_1+m_2)}\frac{e}{1+e}\right).$$

Таким образом, постньютоновский параметр τ, так же как и параметры β и γ, существенно влияет на движение тел двойной системы по орбите, однако полученное выражение (9) записано в терминах координатных величин.

Для перехода в этих выражениях к физически наблюдаемым величинам поступим следующим образом. Заметим прежде всего, что при $e<1$ в силу выражений (5) и (7)—(8) скорости тел двойной системы и модули их радиус-векторов при $N(\varphi)=2\pi k$, где $k=1, 2, \ldots$, совпадают с соответствующими величинами, взятыми при $N=0$. Поэтому периодом обращения T_0 двойной системы можно называть промежуток времени, в течение которого функция $N(\varphi)$ изменяется на 2π. В силу такого операционного определения величина T_0 оказывается измеримой и ее можно использовать для устранения координатно зависимых величин из выражения (9). Для этого, разрешая уравнение (8) относительно φ и интегрируя его, совместно с соотношением (5) для $N(\varphi)$ найдем постньютоновское выражение, определяющее связь между функцией $N(\varphi)$ и временем:

$$\tilde{\omega}t+\mathrm{const}=-\sqrt{1-e^2}\left(1+\frac{m_1+m_2}{a}\left(-\beta-\tau+\frac{3m}{2M}\right)\right)\frac{e\sin N}{1+e\cos N}+$$
$$+\left(2+\left(4\gamma+4-2\beta-\frac{3m}{M}\right)\frac{m_1+m_2}{a}\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{N}{2},\qquad(10)$$

где

$$\tilde{\omega}^2=\frac{m_1+m_2}{a^3}\left(1-\left(2\beta+\gamma+3\tau-\frac{m}{M}\right)\frac{M}{a}\right).$$

Из соотношения (10) легко найти выражение для периода T_0:

$$T_0=2\pi(a^3/M)^{1/2}(1+[(5/2)\gamma+2(1-m/M)+(3/2)\tau]M/a).$$

Разрешая это уравнение относительно большой полуоси a, в постньютоновском приближении получим

$$a=a_0(1-((5/3)\gamma+(4/3)(1-m/M)+\tau)M/a_0),\qquad(11)$$

где $a_0=\left(T_0/2\pi\sqrt{M}\right)^{1/3}$. Воспользовавшись этим выражением, определим эксцентриситет e орбиты первого тела:

$$e=e_0\left(1+((5/3)\gamma+(4/3)(1-m/M)+\tau)M/a_0\right), \tag{12}$$

где e_0 — ньютоновское значение эксцентриситета. Подставляя выражения (11) и (12) для a и e в соотношение (9), для модуля скорости $|V^{\alpha}{}_{(1)}|$ будем иметь

$$|V^{\alpha}_{(1)}|=\frac{m_2}{((m_1+m_2)a_0(1-e_0^2))^{1/2}}\left\{B(1-e_0)+\left[\frac{1}{3}(8-9e_0^2-e_0^4+\right.\right.$$

$$+2e_0(1-14e_0^2))\gamma+\frac{2}{3}\left(7-\frac{13}{2}e_0^2-e_0^4\right)-\frac{1}{3}(1+28e_0^2)e_0-$$

$$-(3(1+e_0^2)e_0+4e_0^2)\tau-(1+e_0)^2\beta-\left(\frac{5}{3}(1-2e_0^2-e_0^4)-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left(\frac{2}{3}-9e_0^2\right)e_0\right)\frac{m}{M}\right]\frac{M}{a_0(1-e_0^2)}\frac{1}{1-e_0}\right\}. \tag{13}$$

Анализируя полученное выражение (13), можно заметить, что модули скоростей каждого тела в постньютоновском порядке существенно зависят от параметра τ и отношения m/M. Наиболее сильное влияние этих величин на траекторию движения и динамические характеристики тел должно быть в том случае, когда двойная система состоит из тел сравнимых масс ($m_1\sim m_2$), совершающих движение по квазиэллиптическим орбитам с эксцентриситетом e, близким к единице. В связи с этим обстоятельством появляется возможность взглянуть под новым углом зрения на экспериментальные данные [1], полученные при наблюдениях двойного пульсара PSR 1913+16.

Действительно, массы тел этой системы примерно равны ($M_1=1{,}42\,m_{\odot}$, $M_2=1{,}43\,m_{\odot}$), их орбиты имеют весьма большой эксцентриситет ($e\approx0{,}6$) и тела движутся с большими орбитальными скоростями $v\sim10^{-3}$ с. Так как непосредственно измеряемой величиной при наблюдении пульсарной системы является частота излучения, то наиболее точно из этих наблюдений может быть определена лучевая скорость пульсара. Поэтому для измерения постньютоновского параметра τ рассмотрим выражение (13), связывающее скорость движения одного из тел системы с его характеристиками. Подставляя в это выражение параметры системы PSR 1913+16, получим

$$|V^{\alpha}_{(1)}|\cong\frac{0{,}4m_2}{((m_1+m_2)a_0(1-e_0^2))^{1/2}}\{1+(3+10\tau)10^{-6}\}.$$

Как следует из этого выражения, для определения параметра τ из результатов наблюдения пульсарной системы скорость движения пульсара, а следовательно, и частота его излучения, должны быть измерены с точностью не ниже, чем $\delta V/V\sim\delta\omega/\omega\sim10^{-5}$.

В настоящее время на основе фазового анализа Блэндфордом и Тюкольски [3] достигнута точность измерения сдвига частоты излучения пульсарной системы PSR 1913+16, превышающая требуемую на один порядок: $\delta\omega/\omega\sim10^{-6}$. Поэтому после усовершенствования алгоритма обработки массива наблюдательных данных параметр τ может быть измерен с точностью в несколько десятых.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность акад. А. А. Логунову за обсуждение результатов и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. М., 1985. [2] Денисов В. И., Логунов А. А., Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.// //Тр. МИАН СССР. 1985. 167. С. 108. [3] Blandford R., Teukolsky S. A.// //Astroph. J. 1976. 205. P. 80.

Поступила в редакцию
10.04.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 2

РАДИОФИЗИКА

УДК 533.9.537.5

ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛОТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМОЙ

М. В. Кузелев, А. Н. Халилов

(кафедра физической электроники)

Проведено численное исследование роли нелинейных эффектов в плазме при развитии пучково-плазменной неустойчивости в волноводе, изучен вопрос о формировании в процессе такой неустойчивости возмущений полей и плотностей пучка и плазмы солитонного типа. Получен количественный критерий применимости в теории пучково-плазменных взаимодействий линейного по электронам плазмы приближения.

В последние десятилетия исследованию взаимодействия электронных пучков с плазмой в пространственно ограниченных системах уделяется повышенное внимание, что главным образом связано с многочисленными задачами плазменной СВЧ-электроники. Несмотря на имеющийся существенный прогресс теории пучково-плазменных взаимодействий (см., напр., [1—5]), целый ряд важных вопросов, имеющих к этой теории отношение, оказывается недостаточно изученным. К ним относятся вопрос о роли нелинейных эффектов в плазме при развитии пучково-плазменной неустойчивости и вопрос о формировании в процессе такой неустойчивости возмущений полей и плотностей пучка и плазмы солитонного типа. Настоящая работа посвящена изучению именно этих вопросов.

1. Рассмотрим в качестве модельной поперечно-неоднородной пучково-плазменной системы металлический волновод, пронизываемый бесконечно тонкими замагниченными электронным пучком и плазмой. Ионы вследствие их большой по сравнению с электронами массой считаются неподвижными. Пучок предполагается нерелятивистским, что позволяет ограничиться потенциальным приближением.

Электромагнитные свойства взаимодействующих систем частиц при указанных выше условиях определяются из следующей системы нелинейных уравнений [6]:

$$\left(\Delta_\perp+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi=-4\pi e\sum_{\alpha=p,b}S_\alpha n_\alpha\delta(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}_\alpha)\int\delta[z-z_\alpha(t,\ z_0)]\,dz_0,$$
$$\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}=-\frac{e}{m}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \qquad (1)$$

где $\Phi=\Phi(\mathbf{r}_\perp,\ z,\ t)$ — электростатический потенциал, $\mathbf{r}_\perp$ — координата