

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.12

ОБОБЩЕННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПАУЛИ—ВИЛЛАРСА
И МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ

М. С. Имашев, Д. А. Славнов

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Рассмотрена возможность применения обобщенной регуляризации Паули—Вилларса с дополнительными условиями, налагаемыми на логарифмы вспомогательных масс, для устранения ультрафиолетовых расходимостей корреляционных функций в случае стохастического квантования скалярного поля. Показана эквивалентность распределения вероятностей регуляризованной стохастической теории распределению евклидовой квантовой теории поля.

Основными величинами, фигурирующими в методе стохастического квантования [1], являются корреляционные функции полей $\varphi(x, t)$, которые зависят от дополнительного параметра t — ланжевеновского времени. Эти поля удовлетворяют уравнениям Ланжевена

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = - \left. \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi(x, t)} + \eta(x, t), \quad (1)$$

$$\langle \eta(x, t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2\delta(t-t')\delta(x-x'). \quad (2)$$

При стремлении t к бесконечности в корреляционных функциях возникают расходимости, аналогичные ультрафиолетовым расходимостям квантовой теории поля.

В данной работе будет рассмотрена возможность применения в стохастическом квантовании обобщенной регуляризации Паули—Вилларса (ОРПВ), разработанной ранее в [2, 3] для регуляризации фейнмановских диаграмм обычной квантовой теории поля. Введение ОРПВ в рамках метода [1] основано на специальном представлении случайного шума в уравнении (1) без изменения корреляторов (2), а ее выбор связан с тем, что по построению ОРПВ является окончательной, т. е. при снятии обобщенной регуляризации ультрафиолетовые расходимости в корреляционных функциях не возникают. По своим же результатам ОРПВ эквивалентна [2, 3] R -операции Боголюбова [4, 5].

Рассмотрим в евклидовом пространстве массивное скалярное поле с действием

$$S = S_0 + gS_I = (1/2) \int dx [\partial_\mu \varphi \cdot \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^2] + gS_I(\varphi),$$

$\mu=1, \dots, 4$; $gS_I(\varphi)$ — самодействие поля, например $g\varphi^4$. Уравнение Ланжевена (1) позволяет ввести обобщенную регуляризацию непосредственно на уровне квадратичной части действия, однако более удобным способом является модификация шума без изменения корреляторов (2):

$$\eta(p, t) \rightarrow \eta_\lambda(p, t) = f_\lambda(p^2) \eta(p, t), \quad (3)$$

где $f_\lambda(p^2)$ — регуляризирующая теорию функция такая, что $f_\lambda \rightarrow 1$ при

$\lambda \rightarrow 0$; λ — параметр регуляризации. Точный вид функции $f_\lambda(p^2)$ будет приведен ниже.

Регуляризованное уравнение Лапжевена для указанного действия имеет в импульсном пространстве следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} = -(p^2 + m^2) \Phi(p, t) - g \frac{\delta}{\delta \Phi} S_I + \eta_\lambda(p, t), \quad (4)$$

$$\langle \eta(p, t) \eta(p', t') \rangle = 2(2\pi)^4 \delta(p + p') \delta(t - t').$$

В случае скалярного поля влияние начального условия экспоненциально затухает с ростом t . Нетрудно найти функцию Грина уравнения (4), удовлетворяющую нулевым условиям при $t = t_0$:

$$G(p, t - t_0) = \theta(t - t_0) \exp\{-(t - t_0)(p^2 + m^2)\}, \quad (5)$$

с помощью которой для стохастического поля получается уравнение

$$\Phi_\lambda(p, t) = \int_{t_0}^t d\tau G(p, t - \tau) \left[\eta_\lambda(p, \tau) - g \frac{\delta}{\delta \Phi} S_I(\Phi) \right].$$

Выбирая в качестве нулевого приближения функцию $\Phi_\lambda^0(p, t)$ при $g = 0$, получим решение этого уравнения в виде ряда по константе связи. Тогда для двухточечной корреляционной функции $\langle \Phi(p, t) \Phi(p', t') \rangle$ в нулевом порядке имеем следующее выражение:

$$D(p, t, t') = (2\pi)^4 \delta(p + p') (p^2 + m^2)^{-1} f_\lambda^2(p^2) \times \\ \times [\exp\{-(p^2 + m^2)|t - t'|\} - \exp\{-(p^2 + m^2)(t + t')\}], \quad (6)$$

т. е. в равновесном пределе $t = t' \rightarrow \infty$ (6) отличается от выражения для свободного пропагатора евклидовой квантовой теории множителем $f_\lambda^2(p^2)$.

В стохастические диаграммы, возникающие при рассмотрении различных корреляционных функций, входят G -линии (5) и D -линии (6), причем в каждый замкнутый цикл входит по крайней мере одна D -линия. Часть соответствующих петлевых интегралов может расходиться при больших импульсах в полной аналогии со случаем квантовой теории поля. Для регуляризации ультрафиолетовых расходимостей выберем функцию (3) следующего вида:

$$f_\lambda^2(p^2) = \sum_{j=0}^{J(N)} C_j(\lambda, N) (p^2 + m^2) (p^2 + m^2 M_j^2(\lambda, N)). \quad (7)$$

На коэффициенты C_j и массы M_j помимо обычных условий Паули—Вилларса [5] наложим дополнительное требование [2]:

$$\sum_{j=0}^{J(N)} C_j(\lambda, N) M_j^{2\alpha}(\lambda, N) \ln^{2\beta} M_j(\lambda, N) = 0, \quad (8)$$

$$J(N) < \infty, N < \infty; \alpha + \beta = N, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+.$$

Ясно, что отличие данного способа регуляризации от стандартной регуляризации Паули—Вилларса заключается, во-первых, в наличии нового предельного перехода по N в выражениях, содержащих свертки пропагаторов. Благодаря тому, что $N \rightarrow \infty$, число условий (8) сколько угодно велико. Во-вторых, в (8) при $\beta \neq 0$ задействованы логарифмы

вспомогательных масс. Поэтому обобщенная регуляризация Паули—Билларса оказывается окончательной в том смысле, что при ее снятии ультрафиолетовые расходимости не возникают. Точные формулировки ОРПВ для случаев массивных и безмассовых полей даны в работах [2, 3]. Правила построения стохастических диаграмм при наличии ОРПВ совпадают с обычно используемыми в методе стохастического квантования [6] с тем лишь отличием, что D -линия задается выражением (6), в котором функция f_λ^2 выбирается в виде (7) с условием (8). Снятие регуляризации осуществляется с помощью предельного перехода [2, 3]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{(\lambda) \rightarrow 0} \equiv \frac{1}{L!} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\mathcal{P}(\lambda_1, \dots, \lambda_L)} \lim_{\lambda_{i_1} \rightarrow 0} \dots \lim_{\lambda_{i_L} \rightarrow 0},$$

где λ_i — параметры регуляризации, ассоциированные с D -линиями стохастических диаграмм; суммирование проводится по всем перестановкам. Из результатов работ [2, 3] следует, что введенная таким образом регуляризация определяет в пределе $N \rightarrow \infty$, $(\lambda) \rightarrow 0$ ультрафиолетово конечные стохастические диаграммы.

Рассмотрим связь регуляризованной стохастической теории с евклидовой теорией. Регуляризованные корреляционные функции $\langle \varphi_\lambda(x_1, t_1) \dots \varphi_\lambda(x_N, t_N) \rangle$, где φ_λ являются решениями уравнения (4), при всех равных ланжевенновских временах можно представить в следующем виде:

$$\langle \varphi_\lambda(x_1, \tau) \dots \varphi_\lambda(x_N, \tau) \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \cdot \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) P^\lambda[\varphi, \tau],$$

где распределение вероятностей есть

$$P^\lambda[\varphi, \tau] = \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{4} \right\} \prod_y \delta(\varphi(y) - \varphi_\lambda(y, \tau)), \quad (9)$$

$\eta^2 = \int dx dt \eta^2(x, t)$, а произведение δ -функций берется по всем точкам евклидова пространства. Функционал (9) удовлетворяет уравнению Фоккера—Планка

$$\frac{\partial P^\lambda}{\partial \tau}[\varphi, \tau] = \int dx \frac{\delta}{\delta \varphi} \left[\frac{\delta S}{\delta \varphi} + \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] P^\lambda[\varphi, \tau] \quad (10)$$

с начальным условием $P^\lambda[\varphi, 0] = \prod_y \delta(\varphi(y))$.

Уравнение (10) позволяет доказать по индукции утверждение о том, что вероятностное распределение стохастической теории, регуляризованной с помощью ОРПВ, имеет своим слабым пределом при $\tau \rightarrow \infty$ распределение регуляризованной евклидовой квантовой теории $P^{e, \lambda}[\varphi]$.

Представим распределение $P^\lambda[\varphi, \tau]$ в виде ряда по константе связи g аналогично [7]:

$$P^\lambda[\varphi, \tau] = \sum_{k=0}^{\infty} g^k P_k^\lambda[\varphi, \tau]. \quad (11)$$

Нулевое приближение $P_0^\lambda[\varphi, \tau]$ можно найти непосредственно из определения (9). Для этого достаточно, используя представление δ -функции в виде континуального интеграла, провести в (9) интегрирование

по шуму, учитывая, что φ_λ в (9) должно являться решением свободного регуляризованного уравнения Ланжевена (4). В результате получим

$$P_0^\lambda[\varphi, \tau] = \int \mathcal{D}\xi \exp \left\{ - \int dp [\xi(p) \frac{1 - \exp \{-2(p^2 + m^2)\tau\}}{2(p^2 + m^2)} \times \right. \\ \left. \times \xi(-p) f_\lambda^2(p^2) + i\xi(p) \varphi(-p) \right\}. \quad (12)$$

В пределе равновесного состояния, следовательно, имеем

$$P_0^\lambda[\varphi, \infty] = N_0^{-1} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int dp \varphi(p) (p^2 + m^2) f_\lambda^{-2}(p^2) \varphi(-p) \right\}.$$

Правая часть последнего выражения — обычное распределение евклидовой квантовой теории $P^{\lambda, e}[\varphi]$ при $g=0$ в случае ОРПВ, причем в силу отсутствия взаимодействия предельный переход по $\lambda \rightarrow 0$ тривиален. Таким образом, для $k=0$ справедливо

$$\omega\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty} P_k^\lambda[\varphi, \tau] = P_k^{\lambda, e}[\varphi], \quad (13)$$

где в правой части представлен член k -го порядка по g евклидова распределения $P^{\lambda, e}[\varphi]$. Доказательство справедливости (13) при $k > 0$ сводится к следующим моментам. Подставляя ряд (11) в уравнение Фоккера—Планка (10), нетрудно получить уравнения в каждом конечном порядке по g для P_k^λ :

$$\frac{\partial P_k^\lambda[\varphi, \tau]}{\partial \tau} = \int dx \frac{\delta}{\delta \varphi} \left[\frac{\delta S_0}{\delta \varphi} + \frac{\delta}{\delta \varphi} \right] P_k^\lambda[\varphi, \tau] + \int dx \frac{\delta}{\delta \varphi} \frac{\delta S_I}{\delta \varphi} P_{k-1}^\lambda[\varphi, \tau], \quad (14)$$

при этом начальные условия задаются: $P_0^\lambda[\varphi, 0] = \Pi \delta(\varphi(y))$. Отсюда k -й член разложения распределения вероятностей можно представить следующим образом:

$$P_k^\lambda[\varphi, \tau] = \int \mathcal{D}\varphi' \int_0^\tau d\tau' D_0^\lambda[\varphi, \varphi'; \tau - \tau'] \int dx \frac{\delta}{\delta \varphi} \frac{\delta S_I}{\delta \varphi} P_{k-1}^\lambda[\varphi', \tau'], \quad (15)$$

где $D_0^\lambda[\varphi, \varphi'; \tau - \tau']$ — функция Грина уравнения (14), равная при $\tau \rightarrow \tau'$ $\Pi \delta(\varphi(x) - \varphi'(x))$:

$$D_0^\lambda[\varphi, \varphi'; \tau - \tau'] = (P_0^\lambda[\varphi', \tau'])^{-1} \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ - \frac{\eta^2}{4} \right\} \times \\ \times \Pi \delta(\varphi(y) - \varphi_\lambda^0(y)) \delta(\varphi'(y) - \varphi_\lambda^0(y)). \quad (16)$$

Вычисление (16) проводится методом стационарной фазы аналогично вычислению (12). Опуская детали, приведем окончательное выражение для функции Грина:

$$D_0^\lambda = \theta(\tau - \tau') N_0^{-1} \exp \left\{ - (1/2) \int dp f^T(p) D f(-p) \right\}, \quad (17)$$

где использованы матричные обозначения $f^T = (\varphi, \varphi')$, $D = (D_{ik})$:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= (p^2 + m^2) f_{\lambda}^{-2}(p^2) [1 - \exp \{-2(\tau - \tau')(p^2 + m^2)\}]^{-1}, \\
D_{12} &= D_{21} = -D_{11} \exp \{-(\tau - \tau')(p^2 + m^2)\}, \\
D_{22} &= D_{11} \exp \{-2(\tau - \tau')(p^2 + m^2)\}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Следующие из (18) асимптотические оценки для функции Грина (17) позволяют на основании представления (15) доказать, что

$$\omega\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \tau} P_k^{\lambda}[\varphi, \tau] = 0.$$

Таким образом, уравнение Фоккера—Планка (10) в каждом конечном порядке по константе связи сводится в пределе равновесного состояния к следующему уравнению:

$$\int dx \frac{\delta}{\delta \varphi} \left[\frac{\delta}{\delta \varphi} + \frac{\delta S_0}{\delta \varphi} \right] P_k^{\lambda}[\varphi, \infty] = - \int dx \frac{\delta}{\delta \varphi} \frac{\delta S_I}{\delta \varphi} P_{k-1}^{\lambda}[\varphi, \infty]. \tag{19}$$

Левая часть (19) представляет собой соответствующие производные от распределения $P_{k-1}^{\lambda, e}$ евклидовой теории, поскольку мы считаем, что соотношение (13) справедливо при $k=1$. Тогда, используя результаты работы [7], нетрудно показать, что уравнение (19) совпадает с уравнением Швингера—Дайсона при наличии обобщенной регуляризации Паули—Вилларса и имеет решение $P_k^{\lambda}[\varphi, \infty] = P_k^{\lambda, e}[\varphi]$. Отсюда следует, что функционал $P_{\lambda}[\varphi, \tau]$ при наличии ОРПВ имеет слабый предел, равный

$$P_{\lambda}^e[\varphi] = Z^{-1} \exp \{-S_{0,\lambda} - gS_I\}. \tag{20}$$

Распределение (20) приводит к функциям Грина евклидовой квантовой теории поля, регуляризованным по ОРПВ.

Таким образом, использование обобщенной регуляризации Паули—Вилларса [2, 3] корректно и в случае стохастического квантования. В пределе равновесного состояния при ланжевенском времени, стремящемся к бесконечности, стохастические ОРПВ переходят в регуляризованные корреляционные функции, которые совпадают с соответствующими евклидовыми вакуумными средними. Снятие регуляризации проводится с помощью симметричного предельного перехода $N \rightarrow \infty$, $(\lambda) \rightarrow 0$, при этом ультрафиолетовые расходимости не возникают, т. е. не требуется введения вычитательной операции. Последнее обстоятельство может иметь важное значение при исследовании стохастических тождеств Уорда [8].

Аналогичную схему регуляризации, основанную на специальном выборе случайного шума в исходном уравнении Ланжевена, фактически, на регуляризации D -линий стохастических диаграмм, можно провести и в случае спинорных полей при выполнении необходимых требований на ядро соответствующего действия [6]. Доказательство эквивалентности регуляризованных по ОРПВ вероятностных распределений стохастической и квантовой теорий для калибровочных полей является непосредственным обобщением рассмотренного выше доказательства для скалярной теории, если использовать стохастическое квантование калибровочных полей с фиксацией калибровки [9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Parisi G., Wu Y. S. // Scientia Sinica. 1981. 24. P. 483. [2] Славнов Д. А. // ТМФ. 1973. 17. С. 342. [3] Славнов Д. А. // ТМФ. 1974. 19. С. 3. [4] Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. // ДАН СССР. 1955. 100. С. 429. [5] Завьялов О. И.

Перенормированные диаграммы Фейнмана. М., 1979. [6] Damgaard P., Huf-fel H.//Phys. Rep. 1987. 152. P. 227. [7] Floratos E., Iliopoulos J.//Nucl. Phys. 1983. B214. P. 392. [8] Zinn-Justin J., Zwanziger D.//Nucl. Phys. 1988. B295. P. 297. [9] Zwanziger D.//Ibid. 1981. 192. P. 258.

Поступила в редакцию
28.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 3

УДК 539.01

СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИИ

Ю. В. Кузьмин

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Предложен метод стохастического квантования теорий поля со закононеопределенным евклидовым действием, основанный на введении нелокального ядра особого вида в обобщенное уравнение Ланжевена. Этот метод применен для стохастического квантования теорий гравитации с эйнштейновским лагранжианом и R^2 -гравитацией.

Стохастическое квантование — новый и быстро развивающийся метод квантования теорий поля. Он обладает весомыми преимуществами, поэтому квантование любой модели, а особенно такой интересной, как модель гравитации, представляет большой интерес. Однако стохастическое квантование гравитации сопряжено с большими трудностями, так как линеаризованное евклидово действие в этом случае положительно не определено. Из-за этого решения уравнения Ланжевена не имеют предела, не зависящего от начальных условий.

Отметим, что закононеопределенность евклидова действия не связана с какой-либо конкретной моделью гравитации, а вытекает непосредственно из ньютоновского предела: результатом одногравитационного обмена должно быть притяжение, а не отталкивание, следовательно, скалярный гравитон должен входить в пропагатор с неправильным знаком. Так, для эйнштейновской гравитации без Λ -члена квадратичная по полям часть действия S_0 и пропагатор $G(k)_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ имеют вид соответственно

$$S_0 = -(2\pi)^4 \int d^4k h_{\mu\nu}(-k) \left[\frac{1}{2} P^{(2)} - P^{(0)} \right]_{\alpha\beta}^{\mu\nu} k^2 h^{\alpha\beta}(k),$$

$$G_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \left[\frac{2P^{(2)}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(k)}{k^2} - \frac{P^{(0)}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}(k)}{k^2} \right], \quad (1)$$

где $P^{(2)}$ и $P^{(0)}$ — проекторы на состояния со спинами 2 и 0,

$$P^{(2)}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\theta_\alpha^\mu \theta_\beta^\nu + \theta_\beta^\mu \theta_\alpha^\nu) - \frac{1}{3} \eta^{\nu\mu} \eta_{\delta\beta} \theta_\gamma^\mu \theta_\alpha^\delta,$$

$$P^{(0)}_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \eta^{\nu\mu} \eta_{\delta\beta} \theta_\gamma^\mu \theta_\alpha^\delta,$$

$$\theta_\alpha^\mu = \eta_\alpha^\mu + \eta^{\mu\gamma} \frac{\Gamma \partial_\alpha \partial_\gamma}{\square}, \quad \square = -\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta,$$

а $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского с сигнатурой $(+, -, -, -)$.