Перенормированные диаграммы Фейнмана. М., 1979. [6] Damgaard P., Huffel H.//Phys. Rep. 1987. **152**. P. 227. [7] Floratos E., Iliopoulos J.//Nucl. Phys. 1983. **B214**. P. 392. [8] Zinn-Justin J., Zwanziger D.//Nucl. Phys. 1988. **B295**. P. 297. [9] Zwanziger D.//Ibid. 1981. **192**. P. 258.

Поступила в редакцию
28.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 3

УДК 539.01

СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИИ

Ю. В. Кузьмин

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Предложен метод стохастического квантования теорий поля со знаконеопределенным евклидовым действием, основанный на введении нелокального ядра особого вида в обобщенное уравнение Ланжевена. Этот метод применен для стохастического квантования теорий гравитации с эйнштейновским лагранжианом и R^2-гравитации.

Стохастическое квантование — новый и быстро развивающийся метод квантования теорий поля. Он обладает весомыми преимуществами, поэтому квантование любой модели, а особенно такой интересной, как модель гравитации, представляет большой интерес. Однако стохастическое квантование гравитации сопряжено с большими трудностями, так как линеаризованное евклидово действие в этом случае положительно не определено. Из-за этого решения уравнения Ланжевена не имеют предела, не зависящего от начальных условий.

Отметим, что знаконеопределенность евклидова действия не связана с какой-либо конкретной моделью гравитации, а вытекает непосредственно из ньютоновского предела: результатом одногравитационного обмена должно быть притяжение, а не отталкивание, следовательно, скалярный гравитон должен входить в пропагатор с неправильным знаком. Так, для эйнштейновской гравитации без Λ-члена квадратичная по полям часть действия S_0 и пропагатор $G(k)^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ имеют вид соответственно

$$S_0 = -(2\pi)^4 \int d^4k h_{\mu\nu}(-k) \left[\frac{1}{2} P^{(2)} - P^{(0)}\right]^{\mu\nu}_{\alpha\beta} k^2 h^{\alpha\beta}(k),$$

$$G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(k) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\left[\frac{2P^{(2)\mu\nu}_{\alpha\beta}(k)}{k^2} - \frac{P^{(0)\mu\nu}_{\alpha\beta}(k)}{k^2}\right], \tag{1}$$

где $P^{(2)}$ и $P^{(0)}$ — проекторы на состояния со спинами 2 и 0,

$$P^{(2)\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta^{\mu}_{\alpha}\theta^{\nu}_{\beta} + \theta^{\mu}_{\beta}\theta^{\nu}_{\alpha}) - \frac{1}{3}\eta^{\gamma\nu}\eta_{\delta\beta}\theta^{\mu}_{\gamma}\theta^{\delta}_{\alpha},$$

$$P^{(0)\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\eta^{\gamma\nu}\eta_{\delta\beta}\theta^{\mu}_{\gamma}\theta^{\delta}_{\alpha},$$

$$\theta^{\mu}_{\alpha} = \eta^{\mu}_{\alpha} + \eta^{\gamma\mu}\frac{\partial_\alpha\partial_\gamma}{\Box}, \quad \Box = -\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta,$$

а $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского с сигнатурой $(+, -, -, -)$.

Для R^2-гравитации с лагранжианом

$$\mathcal{L}=\sqrt{-g}\left(aR^{\mu\nu}R_{\mu\nu}+\frac{b-a}{3}R^2-\varkappa^2R\right)$$

пропагатор равен

$$G^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(k)=\frac{1}{(2\pi)^4}\left[\frac{2P^{(2)}}{k^2-\varkappa^2/a}+\frac{P^{(0)}}{k^2}-\frac{2P^{(2)}}{k^2}-\frac{P^{(0)}}{k^2+\varkappa^2/2b}\right]. \qquad (2)$$

Видно, что при $a>0$, $b<0$ тахионы в (2) отсутствуют, но присутствуют безмассовый скалярный и массивный тензорный духи. Предлагались различные пути решения проблемы. В работе [1], например, стохастическое квантование проводилось в пространстве Минковского. Но доказательство существования предела у решения уравнения Ланжевена требовало введения подавляющего фактора вида $i\varepsilon\varphi^2$ в лагранжиан, где φ — квантовое поле. Для действия (1) необходим подавляющий член, пропорциональный

$$i\varepsilon h_{\mu\nu}(P^{(2)(0)})^{\mu\nu}_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta},$$

где $c>0$. Но он нарушает структуру действия и приводит в пределе к нелокальной теории.

В работе [2] предлагалось заменить линеаризованное действие (1) на

$$-(2\pi)^4\int d^4k h_{\mu\nu}(-k)\left[\frac{1}{2}P^{(2)}+(\gamma-1)P^{(0)}\right]^{\mu\nu}_{\alpha\beta}k^2h^{\alpha\beta}(k);\ \gamma>1,$$

а переход к $\gamma=0$ осуществить в конечной формуле для функций Грина после проведения всех вычислений. Однако в получающиеся для функций Грина выражения входят полюсные сомножители вида $(\gamma-1)^{-1}$. Поэтому корректность перехода от $\gamma>1$ к $\gamma=0$ проблематична.

Мы считаем, что решения можно достичь, используя обобщенное уравнение Ланжевена

$$\frac{dh^A(t)}{dt}=-K^{AA'}\frac{\delta S[h(t)]}{\delta h^{A'}(t)}+f^A(t) \qquad (3)$$

с нелокальным ядром $K^{AA'}$. Индексы A, A' в (3) обозначают совокупность дискретных индексов, нумерующих поля (в случае гравитации — μ, ν), и непрерывных индексов x^0, x^1, x^2, x^3, нумерующих точки пространства-времени. Случайные силы $f^A(t)$, входящие в правую часть (3), коррелируют таким образом:

$$\langle f^A(t),\ f^{A'}(t')\rangle=2K^{AA'}\delta(t-t').$$

Соответствующее уравнение для распределения вероятности

$$\widetilde{P}[h,t]=\exp\left\{\frac{S[h(t)]}{2}\right\}\left\langle\prod_A\delta(h^A-h^A(t))\right\rangle_f$$

имеет вид

$$\frac{dP}{dt}=-H_{FP}\widetilde{P}, \qquad (4)$$

где $H_{FP}=Q^+_A K^{AC}Q^+_C$. (Левая квадратная скобка в аргументе $\widetilde{P}[h,t)$ означает, что $\widetilde{P}[h,t)$ зависит от функции h как функционал, а правая

круглая — что $\tilde{P}[h, t)$ зависит от параметра t как функция. В дальнейшем зависимости от функций и от параметров обозначаются аналогично.) Доказательство формулы (4) приведено в [3] и в приложении. Уравнение (4) имеет устойчивый предел решений, если функционал от полей

$$K^{AA'}[h]\frac{\delta^2 S}{\delta h^{A'}\delta h^{B}} \tag{5}$$

положительно определен. Найдем такое ковариантное ядро, чтобы это выполнялось.

Пусть квадратичная по полям $h^{\mu\nu}$ часть действия имеет вид

$$S_0=\varphi' G'\varphi'-\varphi'' G''\varphi'',$$

где G' и G'' — положительно определенные квадратичные формы, φ' и φ'' принадлежат ортогональным подпространствам. Тогда введение невырожденного эрмитова ядра с единичным детерминантом

$$K=I-2P'', \tag{6}$$

где P'' — проектор на подпространство, включающее φ'', позволяет сделать функционал (5) положительно определенным.

Но в случае гравитации мы не можем непосредственно подставить выражение (6) в (3), так как ядро получается необщековариантным и, следовательно, нарушатся перенормировочные свойства теории. Необходимо ковариантизовать его, заменив входящие в проекторы $P^{(0)}$ и $P^{(2)}$ выражения $\eta_{\mu\nu}$ и ∂_μ на $g_{\mu\nu}$ и D_μ соответственно. Ниже выписаны подходящие ядра для эйнштейновской гравитации (1) (формула (7)) и R^2-гравитации (2) (формула (8)) в случае, когда $a=-2b$:

$$K^{\mu\nu}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g^{\mu}_{\alpha}g^{\nu}_{\beta}+g^{\mu}_{\beta}g^{\nu}_{\alpha})-\frac{2}{3}\left(g^{\mu\nu}-\frac{D^{\mu}D^{\nu}}{D^2}\right)\left(g_{\alpha\beta}-\frac{D_\alpha D_\beta}{D^2}\right), \tag{7}$$

$$\tilde{K}^{\mu\nu}_{\alpha\beta}=K^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\left(1-\frac{D^2}{m^2}\right)^{-1}, \tag{8}$$

где $m^2=\varkappa^2/a$. Видно, что оба ядра существенно нелокальны и зависят от полей. Именно наличие этой зависимости потребовало специального доказательства формулы (4) (в работе [4], например, рассматривались только ядра специального вида:

$$K^{AA'}[h]=E^{A}_{M}[h]\,K^{(0)MM'}\,E^{A'}_{M'}[h],$$

где $K^{(0)MM'}$ не зависело от полей, а в работе [5], где изучались ядра общего вида, положительность гамильтониана Фоккера—Планка H_{FP} не доказывалась).

Сложная зависимость ядер (7), (8) от полей делает затруднительным строгое доказательство положительной определенности (5). Однако положительность квадратичной по полям части (5) очевидна, так как она равна в обоих случаях

$$K^{\mu\nu}_{\gamma\delta}\frac{\delta^2 S}{\delta h_{\gamma\delta}\delta h^{\alpha\beta}}=-(2\pi)^4 k^2\left(\frac{1}{2}P^{(2)}+P^{(0)}\right)^{\mu\nu}_{\alpha\beta}+O(h^{\rho\sigma}). \tag{9}$$

Этого достаточно для построения пропагаторов и всей теории возмущений, стремящейся при $t\to\infty$ к фейнмановскому пределу.

Функция Грина обобщенного уравнения Ланжевена (3) с ядрами (7) или (8) для эйнштейновского или R^2-действия соответственно равна

$$G(k, t) = \exp\{(2\pi)^4 k^2 (P^{(2)}/2 + P^{(0)})\, t\}. \tag{10}$$

Выведем в качестве примера пропагатор полей в эйнштейновской гравитации:

$$\langle h^{\mu\nu}(-k, t),\ h_{\alpha\beta}(k, s)\rangle = \int_0^s \int_0^t G^{\mu\nu}_{\rho\sigma}(t-t')\,\langle f^{\rho\sigma}(t')\, f_{\gamma\delta}(s')\rangle_f \times$$

$$\times\, G^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(s-s')\, dt' ds' = \int_0^{\min(s,t)} dt' \Big[P^{(1)} + P^{(0)}_{-} +$$

$$+ P^{(2)} \exp\left\{(2\pi)^4 \frac{k^2}{2}(|t-t'| + |s-t'|)\right\} -$$

$$- P^{(0)} \exp\{(2\pi)^4 k^2 (|t-t'| + |s-t'|)\}\Big] =$$

$$= (P^{(1)} + P^{(0)} \min(s, t) - \frac{2P^{(2)}}{(2\pi)^4 k^2}\left(\exp\left\{\frac{k^2}{2}(2\pi)^4 |s-t|\right\} -\right.$$

$$\left. - \exp\left\{\frac{k^2}{2}(2\pi)^4 (s+t)\right\}\right) + \frac{P^{(0)}}{(2\pi)^4 k^2}(\exp\{(2\pi)^4 k^2 |s-t|\} -$$

$$- \exp\{(2\pi)^4 k^2 (s+t)\}).$$

При $s = t \to \infty$ получим

$$\langle h^{\mu\nu}(-k)\, h_{\alpha\beta}(k)\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{[2P^{(2)} - P^{(0)}]^{\mu\nu}_{\alpha\beta}}{k^2} + (P^{(1)} + P^{(0)}_{-})^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\, t \tag{11}$$

для эйнштейновской гравитации и

$$\frac{m^2}{m^2 - k^2}\,\frac{1}{(2\pi)^4}\,\frac{[2P^{(2)} - P^{(0)}]^{\mu\nu}_{\alpha\beta}}{k^2} + (P^{(1)} + P^{(0)}_{-})^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\, t \tag{12}$$

для R^2-гравитации. Расходящаяся часть пропагатора (11) или (12) калибровочно неинвариантна и исчезает при вычислении калибровочно-инвариантных величин. Другие же расходимости в пропагаторе отсутствуют. Исчезли и следы введенного нелокального ядра $K^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x)$.

Формальное доказательство того, что при $t \to \infty$ $\bar{P}[\varphi, t)$ стремится к $\exp\{-S[\varphi]/2\}$ и не зависит от ядра $K^{\mu\nu}_{\alpha\beta}(x)$, приведено в приложении.

Таким образом, введя нелокальное ядро $K^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ в обобщенное уравнение Ланжевена (3), мы стохастически проквантовали гравитацию. При этом в пределе нелокальность, связанная с ядром, исчезает и мы приходим к правильной локальной теории (для пропагатора это продемонстрировано явно, а для случая с взаимодействием приведено формальное доказательство в приложении).

Предложенный метод позволяет стохастически квантовать не только теории гравитации, но и широкий класс других теорий со знакоопределенным евклидовым действием.

В заключение автору очень приятно выразить глубокую благодарность Ю. С. Вернову, М. Н. Мнацакановой, Н. А. Свешникову, Д. А. Славнову и Микио Намики (Токио) за интерес к этой работе.

Приложение

Выведем уравнение (4) для случая, когда ядро $K^{AA'}$ зависит от полей. Из (3) следует, что величина

$$P[\varphi, t) = \left\langle \prod_A \delta(\varphi^A - \varphi^A(t)) \right\rangle_f$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{dP[\varphi, t)}{dt} = -\left\langle \frac{d\varphi^A(t)}{dt} \frac{\delta}{\delta\varphi^A} \prod_B \delta(\varphi^B - \varphi^B(t)) \right\rangle_f =$$

$$= \left\langle K^{AA'}[\varphi(t)] \frac{\delta S[\varphi(t)]}{\delta\varphi^{A'}(t)} \frac{\delta}{\delta\varphi^A} \prod_B \delta(\varphi^B - \varphi^B(t)) \right\rangle_f -$$

$$- \left\langle f^A(t) \frac{\delta}{\delta\varphi^A} \prod_B \delta(\varphi^B - \varphi^B(t)) \right\rangle_f, \tag{13}$$

где производная $d\varphi^A(t)/dt$ понимается в смысле исчисления Ито [6].

Преобразуя первое слагаемое в правой части (13) при помощи тождества (см. [4])

$$\left\langle C(q) \frac{\delta}{\delta x} \delta(x-q) \right\rangle_q = \frac{\delta}{\delta x} (C(x) \langle \delta(x-q) \rangle_q),$$

а второе — при помощи теоремы Вика [7], получим

$$\frac{dP[\varphi, t)}{dt} = \frac{\delta}{\delta\varphi^A} \left(K^{AC}[\varphi] \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi^C} P[\varphi, t) \right) + \frac{\delta}{\delta\varphi^A} \left(K^{AC}[\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi^C} P[\varphi, t) \right).$$

Для величины $\widetilde{P}[\varphi, t)$ это даст

$$\frac{d\widetilde{P}[\varphi, t)}{dt} = -H_{FP}[\varphi] \widetilde{P}[\varphi, t),$$

где $H_{FP}[\varphi] = Q_A^+[\varphi] K^{AC}[\varphi] Q_C^-[\varphi]$,

$$Q_A^+[\varphi] = \mp \frac{\delta}{\delta\varphi^A} + \frac{1}{2} \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi^A}.$$

Условие положительности введенного гамильтониана Фоккера—Планка H_{FP} есть

$$\langle \widetilde{P} | H_{FP} | \widetilde{P} \rangle / \langle \widetilde{P} | \widetilde{P} \rangle > 0.$$

Подробности доказательства приведены в работе автора [3]. При $t \to \infty$ исчезают все члены разложения $\widetilde{P}$ по собственным векторам H_{FP}, кроме $\widetilde{P}_0$, удовлетворяющего соотношению $Q_A^- \widetilde{P}_0 = 0$. Отсюда следует, что $\widetilde{P} \to \widetilde{P}_0 \sim \exp(-S/2)$ и предел распределения $\widetilde{P}$ не зависит от нелокального ядра $K^{AA'}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hüffel H., Rumpf H.//Phys. Lett. 1984. **148B**. P. 104. [2] Fukai T., Okano G. Stochastic quantization of linearized Euclidean gravity: Prepr. WU-HEP-84-8. Tokyo, 1984. [3] Кузьмин Ю. В. Стохастическое квантование гравитации и нелокальность: Препринт НИИЯФ МГУ. 1989, № 89-59/136. [4] Мигдал А. А.//

//УФН. 1986. 149. С. 3. [5] Rumpf H.//Phys. Rev. 1986. D33. P. 545. [6] Ито К.//
//Математика. 1959. 5, № 3. С. 131. [7] Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. М., 1984. Гл. 8.

Поступила в редакцию
29.06.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 3

УДК 539.12.01

УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ КОНЕЧНОСТЬ КАЛИБРОВОЧНОЙ МОДЕЛИ ВЕССА—ЗУМИНО—ВИТТЕНА НА ОДНОРОДНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. В. Белокуров, П. М. де Барруш Пашеку Сэара де Са (Португалия)

(НИИЯФ)

В нелинейной двумерной модели, действие которой есть сумма действий двух моделей Весса—Зумино—Виттена и взаимодействия специального вида между ними, классический тензор энергии-импульса выражается через сохраняющиеся токи. Для того чтобы генерируемая им алгебра Вирасоро имела постоянный центральный заряд в квантовой теории, требуется конечность теории. Явным вычислением одно- и двухпетлевых контрчленов показано, что это имеет место только при специальном выборе параметров, при котором модель калибровочно инвариантна и определена на однородном пространстве.

Развитие теории струн вызвало значительный интерес к исследованию свойств нелинейных двумерных моделей квантовой теории поля. Сама возможность непротиворечивой квантовой формулировки теории струн определяется наличием конформной инвариантности в соответствующей нелинейной двумерной теории, что в свою очередь требует отсутствия в ней ультрафиолетовых расходимостей [1]. Играющая ключевую роль в этих построениях нелинейная двумерная сигма-модель с членом Весса—Зумино [2] оказывается ультрафиолетово конечной тогда [3] и только тогда [4—8], когда полевое многообразие параллелизуется, т. е. обобщенный тензор кривизны, включающий кручение, обращается в нуль. Для рассматриваемых сигма-моделей такому условию удовлетворяют только групповые многообразия [9].

Нелинейная сигма-модель с нулевым обобщенным тензором кривизны полевого многообразия называется моделью Весса—Зумино—Виттена (ВЗВ-моделью). Она точно решаема и эквивалентна теории свободных фермионов [2]. Оператор тензора энергии-импульса, генерирующий алгебру Вирасоро, при этом выражается через сохраняющиеся токи — генераторы алгебры Каца—Муди (см., напр., [10]). Имеет место и обратная связь, а именно: существование в сигма-модели сохраняющихся токов приводит к условию параллелизуемости полевого многообразия [11, 12].

Конформно-инвариантные модели с более сложными полевыми многообразиями могут быть получены как обобщения ВЗВ-модели. Большой интерес представляют в этом смысле однородные пространства смежных классов. Основой для построения соответствующих квантовополевых моделей могут служить так называемые калибровочные ВЗВ-модели [13—15].

В настоящей работе рассматривается один из вариантов таких моделей, предложенный в статье [14]. Действие представляет собой сумму действий двух ВЗВ-моделей и взаимодействия специального вида между ними:

$$I = I_0(U; n) + I_0(V; m) + I_1(U, V; k). \tag{1}$$