графика видно, что малые пороги генерации достигаются и при конфигурации резонатора, соответствующей неустойчивой области.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что для получения минимальных порогов генерации в твердотельных кольцевых лазерах целесообразно использовать резонаторы, эквивалентные концентрическому с компенсацией астигматизма зеркал. Приведенная методика расчета позволяет рассчитать оптимальный размер накачиваемой области для получения минимального порога генерации.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. В. Кравцову за помощь в работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Доценко А. В., Корниенко Л. С., Кравцов Н. В. и др.//Квант. электроника. 1986. **13**. С. 95. [2] Ключан Е. Л., Ларионцев Е. Г., Наний О. Е., Шелаев А. Н.//Квант. электроника. 1982. **14**. С. 1385. [3] Zhou B., Kane T. J., Dixon G. J., Byer R. L.//Opt. Lett. 1985. **10**. P. 62. [4] Ярив А. Квантовая электроника. М., 1980. [5] Коваленко Е. С.//Квант. электроника. 1976. **3**. С. 433. [6] Кукушкин В. Г.//Квант. электроника. 1983. **10**. С. 1474. [7] Кукушкин В. Г.//Там же. 1987. **14**. С. 381. [8] Ищенко Е. Ф. Открытые оптические резонаторы. М., 1980. [9] Kogelnik H., Li T.//Appl. Opt. 1966. **5**. P. 1550. [10] Kogelnik H., Ippen E. P., Dienes A., Chank Ch.//IEEE. J. of Quant. Electron. 1972. **QE-8**. P. 373.

Поступила в редакцию
14.07.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 3

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.213

АКУСТИЧЕСКАЯ ДИФРАКЦИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ ГРАНИЧНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

В. А. Буров, А. В. Глазков, И. П. Прудникова, О. Д. Румянцева, Е. Я. Тагунов

(кафедра акустики)

Кратко изложен подход к решению томографических обратных задач рассеяния на граничных акустических неоднородностях с использованием экстраполированного метода Ричардсона. Приводятся результаты экспериментальной проверки разработанной теории.

Акустическая дифракционная томография граничных рассеивателей предполагает восстановление формы акустически мягких (или жестких) объектов по измеренным данным о рассеянном ими акустическом поле.

В предлагаемой работе восстановление формы сводится к оценке вида характеристической функции, равной единице внутри объекта. Предполагается, что измерения проводятся в серии экспериментов на одной или нескольких частотах. Источники первичного поля располагаются последовательно таким образом, чтобы в результате объект был всесторонне облученным. Для определенности предполагается, что рассеиватель является акустически мягким и на его границе выполняется условие Дирихле.

Предположим, что исследуемый объект занимает область пространства Г, ограниченную поверхностью Σ. Полное акустическое поле $U(\mathbf{r})$ равно нулю при $\mathbf{r}\in\Sigma$. Рассеянное на таком объекте поле $u(\mathbf{r})$ можно представить в виде поля, излученного распределенными вторичными источниками, расположенными на сфере (в двумерном случае — окружности) S', целиком заключенной внутри Г [1]. Эта сфера окружается близкой к ней концентрической сферой S, также принадлежащей Г. Пространство между Σ и S будем называть Γ^-. Оно описывается характеристической функцией $\gamma^-(\mathbf{r})$, равной единице при $\mathbf{r}\in\Gamma^-$ и нулю при $\mathbf{r}\notin\Gamma^-$. Для этой функции справедливо уравнение [2], являющееся следствием интегрального соотношения Гельмгольца—Кирхгофа, условий Дирихле на границе тела и формулы Грина для Γ^-:

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \gamma^-(\mathbf{r}')\,\nabla_{\mathbf{r}'}\,[G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\nabla_{\mathbf{r}'}U(\mathbf{r}')]\,d\mathbf{r}'=\int\limits_{S} U(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}}\,d\sigma, \qquad (1)$$

где $\mathbf{R}$ — полное пространство, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ^-, $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ — функция Грина свободного пространства. В этом уравнении предполагаются известными: радиус r_0 сферы S; радиус R_0 сферы, целиком включающей в себя область Г.

Идея алгоритма состоит в итерационном поиске минимума функционала от γ^-, включающего в себя невязку в выполнении интегральных соотношений вида (1), справедливых для рассеяния на мягкой границе, и «штрафной» добавки, отражающей априорное требование к допустимым значениям оцениваемой характеристической функции.

В случае двумерной задачи кольцо $r_0\leqslant r\leqslant R_0$, внутри которого ищется $\gamma^-(\mathbf{r})$, разбивается на N равных частей по радиусу и M — по углу. В каждой ячейке получившейся полярной сетки $\gamma^-(\mathbf{r})$ заменяется кусочно-постоянной функцией γ_{nm}, n — индекс радиального разбиения, m — углового. При численном моделировании система из NM нелинейных уравнений для нахождения γ_{nm} получается минимизированием функционала

$$\Phi[\gamma]=|I|^2+\mu\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(\gamma_{nm}-\gamma_{nm}^2)^2, \qquad (2)$$

где μ — параметр управления сходимостью алгоритма, а I — невязка:

$$I=\sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T}\Big[\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}A_{nm}^{pt}\gamma_{nm}-y^{pt}\Big]. \qquad (3)$$

Первое слагаемое в квадратных скобках выражения (3) соответствует левой части уравнения (1) с учетом дискретизации $\gamma^-(\mathbf{r})$, а второе слагаемое — правой части. Оба слагаемых зависят от изменения координат приемника (индекс p) и направления облучения объекта (индекс t, $t=\overline{1,\ T}$).

Каждое из уравнений для γ_{nm} соответствует условию

$$\frac{\partial\Phi[\gamma]}{\partial\gamma_{ab}}=0, \quad a=\overline{1,\ N}, \quad b=\overline{1,\ M}. \qquad (4)$$

Параметр $\mu>0$ обеспечивает независимость всех уравнений системы (4) при фиксированных нелинейных членах. Это обеспечивает возможность того, что количество независимых данных измерения (количество гармоник, оставляемых в угловом спектре рассеянного поля, умноженное на T) может быть меньше, чем число неизвестных. Система (4) записывается в форме

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} B_{abnm}\gamma_{nm}=z_{ab}, \tag{5}$$

где матрица коэффициентов $B\equiv\{B_{abnm}\}$ имеет вид $B=A^{+}A+\mu E$, $A\equiv\left\{\sum_{p=1}^{P}\sum_{t=1}^{T} A_{nm}^{pt}\right\}$, E — единичная матрица; в правую часть системы (5) входят свободные члены и члены, нелинейные относительно γ_{ab}. Матрица B является квадратичной, положительно определенной. В связи с этим для решения (5) удобно применить экстраполированный метод Ричардсона [3]. Однако этот метод работает для линейной системы уравнений, поэтому нелинейную систему (5) приходится решать последовательным выполнением внешних и внутренних итераций. Каждая новая внешняя итерация, включающая в себя цикл внутренних итераций, определяется фиксированным параметром μ и нелинейным членом, который рассчитывается по итоговому результату предыдущей внешней итерации. Для 1-й внешней итерации нелинейный член вычисляется по начальному приближению для γ_{nm}. В качестве начального приближения полагалось $\gamma_{nm}=0{,}5$, что наиболее целесообразно в силу определения характеристической функции. Для контроля сходимости итераций оценивалась относительная невязка ν_j системы (5) при $\mu=0$:

$$\nu_j=\sqrt{\frac{\sum\limits_{a=1}^{N}\sum\limits_{b=1}^{M}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} B_{abnm}\gamma_{nm}-z_{ab}\right)^2_{\mu=0}}{\sum\limits_{a=1}^{N}\sum\limits_{b=1}^{M}(z_{ab})^2_{\mu=0}}}.$$

Отметим, что, несмотря на единственность решения обратной задачи рассеяния на мягком рассеивателе в ее строгой функциональной постановке (см. [4, § 6.3]) и тот факт, что истинное значение γ^{-} обеспечивает абсолютный минимум исследуемого функционала, вопрос о радиусе локальной выпуклости дискретизованной конечномерной задачи и сходимости итерационного алгоритма ее решения достаточно сложен. Для практических целей важно, что устойчивость решения и радиус сходимости растут с увеличением избыточности данных, и в приводимых примерах итерационный процесс сходился даже при начальном задании γ^{-} в виде постоянного значения 0,5.

В процессе внутренних итераций с ростом индекса этих итераций j невязка ν_j монотонно уменьшалась. Когда $\nu_j-\nu_{j-1}$ становилась меньше определенного малого фиксированного значения, данный цикл внутренних итераций заканчивался. Далее происходил переход к следующей внешней итерации, сопровождающийся не только коррекцией μ, но и ограничением γ_{nm}, выходящих за границы интервала [0; 1], путем присвоения им соответствующих крайних значений.

При одноракурсном облучении исследуемого объекта в ходе численного восстановления практически не изменяются от начального приближения те значения γ_{mn}, которые попадают в «зону тени». Для обеспечения удовлетворительного восстановления всех γ_{mn} оказалось необходимым облучать объект с нескольких направлений, в качестве которых были выбраны четыре встречно-перпендикулярных направления.

Для более надежного выявления клеток, где $\gamma^{-}(\mathbf{r})$ не является постоянной и, следовательно, значение γ_{nm} определено не строго, в функционале (2) целесообразно заменить нелинейный член

$$\mu \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{nm}^{2})^{2}$$

выражением

$$\mu \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{nm}^{2})^{2} (\gamma_{nm}-0{,}5)^{2}. \qquad (6)$$

Для экспериментальной проверки изложенного метода восстановления был взят цилиндр радиуса 3,5 см (при длине волны облучающего поля $\lambda=1{,}2$ см) с акустически мягкими стенками, который помещался в тонкий слой воды. В случае одномодового распространения и рассеяния ультразвука в такой системе моделируется двумерная обратная задача акустического рассеяния [5]. Измерения амплитуды и фазы рассеянного поля производились в 256 эквидистантных точках на окружности радиуса $R=36$ см для четырех направлений облучения объекта.

Обработка экспериментальных данных проводилась двумя способами. В первом способе нелинейный член был взят в виде (6), т. е. без учета априорной информации о звездности объекта [6]. Во втором случае информация о звездности была включена в функционал $\Phi[\gamma]$ в виде дополнительного нелинейного члена типа

$$\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m})^{2} (1-(\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m}))^{2}. \qquad (7)$$

Физический смысл этого члена заключается в том, что для фиксированного угла, описываемого индексом m, в силу предположения о звездной форме объекта относительно начала координат значение характеристической функции при переходе от ячейки полярной сетки с радиальным номером n к ячейке с радиальным номером $n+1$ либо не изменяется, либо единственный раз изменяется на -1. Двум этим случаям соответствуют 1-й и 2-й сомножители в (7). Это определяет отличие нелинейного члена (7) от (6), где лишь обеспечивается удержание γ_{nm} вблизи значений 0 или 1.

Во втором способе восстановления минимизируемый функционал был реализован в трех вариантах:

1) $$\Phi[\gamma]=|I|^{2}+\mu \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{nm}^{2})^{2}+$$
$$+\mu \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m})^{2} (1-(\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m}))^{2};$$

2) $$\Phi[\gamma]=|I|^{2}+\mu \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{nm}^{2})^{2} (\gamma_{nm}-0{,}5)^{2}+$$
$$+\mu \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{M} (\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m})^{2} (1-(\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m}))^{2};$$

3) $\Phi[\gamma]=|I|^2+\mu\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(\gamma_{nm}-\gamma_{nm}^2)^2(\gamma_{nm}-0{,}5)^2+$

$$+\mu\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{M}(\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m})^2(1-(\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m}))^2(0{,}5-(\gamma_{nm}-\gamma_{n+1,m}))^2,$$

где I по-прежнему описывается выражением (3). Результаты реконструкции границы объекта приводятся для этих случаев на рис. 1, 2, 3 соответственно, где $\lambda=1{,}2$ см, $r_0=2{,}95$ см, $R_0=4{,}20$ см, $N=5$, $M=16$, $T=$

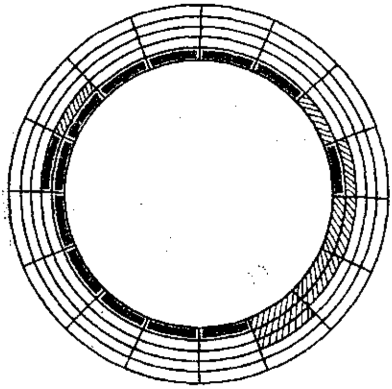

Рис. 1

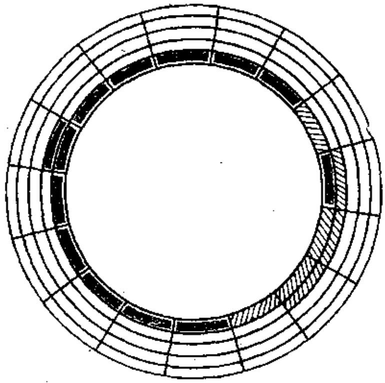

Рис. 2

$=4$. Результат последнего варианта оказался наименее удачным в связи с тем, что в нем разрешен скачок γ_{nm}, равный 0,5, приводящий к образованию большого числа клеток со значениями γ_{nm}, близкими к этой величине.

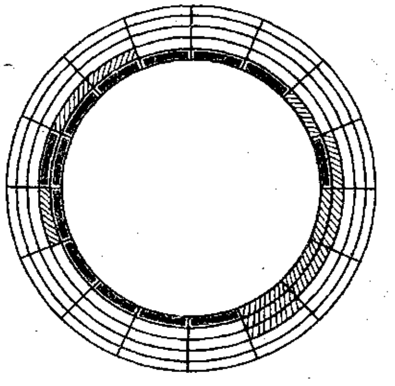

Рис. 3

Во всех трех представленных вариантах восстановления было проведено 6 внешних и около 10 внутренних итераций для каждого случая фиксирования нелинейного члена. Относительная невязка ν_j в конце последнего цикла внутренних итераций не превосходила 4%. По окончании итераций считалось, что ячейки сетки с $\gamma_{nm}\geqslant 0{,}7$ целиком заняты объектом (закрашенные ячейки на рисунках), с $\gamma_{nm}\leqslant 0{,}3$ — полностью свободны (пустые ячейки), а с $\gamma_{nm}\in(0{,}3;\ 0{,}7)$ пересекаются границей объекта (заштрихованные ячейки). Использование такого критерия приемлемо в силу того, что экспериментальные данные всегда содержат шумовые помехи, поэтому идеальной сходимости значений γ_{nm} к нулю или единице не может быть, даже если $\gamma^{-}(\mathbf{r})$ идеально вписывается в накладываемую на объект полярную сетку. Для более точного восстановления границы в клетках с $\gamma_{nm}\in(0{,}3;\ 0{,}7)$ требуется более мелкое разбиение пространства.

Погрешности восстановления в отмеченных экспериментах можно объяснить следующими причинами. Во-первых, конкретный расчет проводился в предположении, что падающая волна является плоской. Однако в реальном эксперименте акустическая волна в области локализации объекта имела неоднородность по амплитуде до 15% и по фазе до 10°. Учет реальных значений падающего поля не представляет принципиальных трудностей, однако делает всю процедуру более громоздкой. Возможно внесение поправок на последних итерациях, когда необходимо уточнить форму тела в пределах небольшого числа ячеек. Во-вторых, с целью повышения обусловленности матрицы B были отсечены спектральные гармоники рассеянного поля, содержащие определенную информацию об объекте, но оказавшиеся значительно зашумленными. Наличие шумов приводит в силу некорректности обратной задачи рассеяния к искажениям характеристической функции вблизи границы объекта в области шириной порядка длины волны излучения. Это также может быть объяснено тем, что источники вторичного поля, рассчитанные по зашумленному рассеянному полю, создают поле, не компенсирующее на границе Σ поле падающее; кроме этого, физическое моделирование рассеивающего объекта с 1-м граничным условием может быть не достаточно совершенно. В связи с отмеченными факторами на границе Σ возможно неточное выполнение условия Дирихле. Для повышения точности оценки надо поднять точность экспериментальной информации и иметь избыточность данных об объекте как за счет увеличения количества направлений облучения объекта, так и за счет многочастотности облучения.

Предложенный в работе алгоритм может, по нашему мнению, лечь в основу разработки практических схем решения задач волновой интроскопии с использованием не только акустического, но и электромагнитного излучения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кравцов В. В.//ДАН СССР. 1977. 233, № 1. С. 23. [2] Буров В. А., Глазков А. В., Горюнов А. А. и др.//Тез. докл. IV Всесоюз. симп. по вычислит. томографии, Ташкент, 10—12 окт. 1989. Новосибирск, 1989. Ч. 1. С. 162 [3] Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М., 1988. [4] Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987. [5] Глазков А. В., Тагунов Е. Я.//Тез. докл. III Всесоюз. школы-семинара «Методы гидрофизических исследований», Светлогорск, 16—25 мая 1989. Калининград, 1989. Ч. 2. С. 67. [6] Буров В. А., Глазков А. В., Румянцева О. Д., Рычагов М. Н., Тагунов Е. Я.//Там же. С. 64.

Поступила в редакцию
07.07.89