ГЕОФИЗИКА

УДК 551.466

О РАЗРУШЕНИИ И ДИССИПАЦИИ ДЛИННЫХ ВОЛН НА ШЕЛЬФЕ

С. А. Арсеньев, А. Ю. Губарь, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Рассматривается задача расчета нелинейных процессов усиления гармоник, укручения фронта и разрушения (с образованием ударной) длинной монохроматической волны, набегающей на мелководный плоский шельф. Известный в теории метод простых волн обобщается на случай учета диссипации, обусловленной трением о дно. Найдены условия обрушения и проведен расчет роста гармоник в приливной волне M_2, распространяющейся по Сибирскому шельфу.

Экспериментальные исследования длинных приливных волн показывают, что очень часто в их спектрах высших гармоник нет. Например, спектры приливной волны M_2 (главная лунная полусуточная волна), построенные по данным в районе Курильской гряды [1], обнаруживают только вторую M_4 и третью M_6 гармоники, остальные (M_8, $M_{10}, \ldots$) отсутствуют. Аналогичные спектры приводятся в работе [2] для северо-восточного побережья Тихого океана и в работе [3] для Гавайских островов. Нет высших гармоник и в спектрах колебаний уровня Белого моря, где наряду с основной волной M_2 присутствует только вторая гармоника M_4 [4]. Теоретически следует ожидать, что процессы генерации гармоник в длинной нелинейной волне можно описать в рамках римановского метода простых волн [5, 6]. Соответствующие формулы разложения Бесселя—Фубини для длинных волн были выведены Пелиновским [7], которому удалось аналитически воспроизвести результаты решения задачи об изменении спектра волны на мелководье, полученные в работе Шулейкина [8] путем трудоемкого численного интегрирования. Однако в работах [7, 8] предсказывается генерация всех гармоник, что противоречит наблюдениям и требует объяснения. Одной из вероятных причин несоответствия теории и наблюдений может быть не учтенное в [7, 8] трение о дно, которое подавляет высшие гармоники.

Действительно, данные наблюдений и теоретические оценки [9—11] показывают, что трение о дно, нелинейные ускорения и горизонтальные градиенты давления (уровня) являются основными факторами, определяющими процесс распространения длинной волны на шельфе. Другие факторы, такие, как, например, ускорение Кориолиса, на мелководье менее существенны и могут не учитываться.

Таким образом, распространим теоретическое описание [7, 8] на случай диссипации, обусловленной трением о дно. Наша цель — вывести необходимые соотношения, описывающие процессы усиления гармоник, укручения фронта и разрушения длинной волны на плоском шельфе. За исходные примем уравнения нелинейных длинных волн в однородной жидкости [12]

$$u_t+uu_x+g\eta_x+\omega^*u=0, \tag{1}$$

$$[(H+\eta)u]_x+\eta_t=0. \tag{2}$$

Здесь u — средняя по глубине горизонтальная составляющая скорости течения, η — смещение свободной поверхности, ω^* — частота трения и H — глубина жидкости. В безразмерных переменных

$$\bar{\eta}=\eta/H, \quad \bar{u}=u/c_0, \quad \bar{t}=\omega t,$$
$$\bar{x}=k_0x, \quad c_0=\sqrt{gH}, \quad \omega=c_0k_0 \tag{3}$$

уравнения (1), (2) имеют вид

$$\bar{u}_{\bar{t}}+\bar{u}\bar{u}_{\bar{x}}+\bar{\eta}_{\bar{x}}+r\bar{u}=0, \tag{4}$$

$$(1+\bar{\eta})\,\bar{u}_{\bar{x}}+\bar{\eta}_{\bar{x}}+\bar{\eta}_{\bar{t}}=0. \tag{5}$$

Здесь $r=\omega^*/\omega$ — параметр трения Рэлея.

Этот параметр будем полагать малым ($r\ll 1$) и, чтобы понять механизм взаимодействия нелинейных волн с трением, будем искать решение (4), (5) в виде

$$\bar{u}=rV(\xi,\ \tau),$$
$$\bar{\eta}=rh(\xi,\ \tau), \tag{6}$$

где

$$\xi=r\bar{x},\ \ \tau=\bar{t}-\bar{x},\ \ \partial/\partial\tau=\partial/\partial\bar{t},\ \ \partial/\partial\bar{x}=-\partial/\partial\tau+r\partial/\partial\xi.$$

В результате получим

$$V_\tau+rV\,(rV_\xi-V_\tau)-h_\tau+rh_\xi+rV=0, \tag{7}$$

$$(1+rh)\,(rV_\xi-V_\tau)+r\,(rh_\xi-h_\tau)\,V+h_\tau=0. \tag{8}$$

Систему уравнений (7), (8) решаем методом последовательных приближений:

$$V=V_0+rV_1+\ldots,\ \ h=h_0+rh_1+\ldots, \tag{9}$$

но фактически интересующие нас затухающие простые волны будут получены уже в нулевом приближении. Остальные поправки V_1, $h_1,\ldots$ получаются из решения линейных уравнений с неоднородностями, зависящими от V_0, h_0, и качественных изменений в поведение решения не внесут.

Подставляя (9) в (7), (8) и приравнивая выражения, стоящие перед одинаковыми степенями r, получим $V_{0\tau}=h_{0\tau}$. Отсюда в силу однородности задачи $V_0=h_0=\Phi(\varepsilon,\ \tau)$ и далее

$$V_{1\tau}-h_{1\tau}-\Phi_\tau\Phi+\Phi_\xi+\Phi=0,$$
$$-(V_{1\tau}-h_{1\tau})-2\Phi_\tau\Phi+\Phi_\xi=0.$$

Складывая эти уравнения, найдем

$$2\Phi_\xi-3\Phi_\tau\Phi+\Phi=0. \tag{10}$$

Ищем решение (10) в виде $\Phi=\exp\{f-\xi/2\}$. Тогда для $f(\xi,\ \tau)$ получаем уравнение $f_\xi=(3/2)f_\tau\exp\{f-\xi/2\}$, которое легко интегрируется методом характеристик: $\tau=3\exp\{f-\xi/2\}+\tilde{\varphi}(f)$. Отсюда, возвращаясь к исходной функции Ф, получим

$$\tau-3\Phi=\varphi[\Phi\exp\{\xi/2\}]. \tag{11}$$

Нас интересуют волны, имевшие вид гармонических при падении на шельф, т. е. граничная задача: $\Phi=a\cos t$ при $x=0$. Поэтому

$$\tau=\arccos(\Phi/a),\ \xi=0. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11), находим функцию φ и решение в виде затухающей простой волны

$$\Phi=a\exp\{-\xi/2\}\cos(\tau-3\Phi[1-\exp\{\xi/2\}]). \tag{13}$$

Решение (13) имеет существенное отличие от обычных простых волн. Последние характеризуются тем, что какими бы ни были граничные значения волны, всегда на некотором конечном расстоянии от источника волна разрушается с образованием ударной. Для затухающих простых волн (13) это не так. Действительно, дифференцируя (13), найдем

$$\Phi_{\xi}^{-1}\sim 1+3a\exp\{-\xi/2\}[1-\exp\{-\xi/2\}]\sin\{\tau-3\Phi[1-\exp\{\xi/2\}]\}.$$

В точке образования ударной волны эти производные обращаются в бесконечность. Однако если $3a<1$, то знаменатель нигде не обращается в нуль и ударная волна никогда не возникает. Соответствующее условие можно записать в виде

$$u_0<\frac{1}{3}\frac{\omega^*}{\omega}\sqrt{gH} \tag{14}$$

или в виде

$$F<(1/3)r. \tag{15}$$

Здесь $F=u_0/\sqrt{gH}$ — число Фруда и u_0 — амплитуда скорости течения в падающей на шельф волне.

Получим для (13) решение в явном виде, аналогичное решению Бесселя—Фубини для обычных простых волн. Для этого воспользуемся методом последовательных приближений:

$$\Phi_0=0,\ \Phi_1=a_1\exp\{-\xi/2\}\operatorname{Re}(\exp\{i\tau\}),$$

$$\Phi_2=a\exp\{-\xi/2\}\operatorname{Re}[\exp\{i\tau+i\alpha\cos\tau\}].$$

Здесь $\alpha=3a[1-\exp\{-\xi/2\}]$. Отсюда, используя известную из теории функций Бесселя формулу, получим

$$\Phi_2=a\exp\left\{-\frac{\xi}{2}\right\}\operatorname{Re}\left\{\exp\{i\tau\}\left[J_0(\alpha)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(\alpha)\cos 2n\left(\tau+\frac{\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\cdot 2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(\alpha)\sin(2n+1)\left(\tau+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$= a \exp\left\{-\frac{\xi}{2}\right\}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[J_{2n}(\alpha) - J_{2n+2}(\alpha)]\cos[(2n+1)\tau + \pi n] +\right.$$

$$\left.+ \sum_{n=1}^{\infty}[J_{2n-1}(\alpha) + J_{2n+1}(\alpha)]\cos\left[2n\tau + \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi\right]\right\} \equiv$$

$$\equiv a\left[A_1(\xi)\cos\xi + A_2(\xi)\cos\left(2\tau + \frac{\pi}{2}\right) + A_3(\xi)\cos(3\tau + \pi) + \ldots\right].$$

Конкретные расчеты проведем для приливной волны M_2 с основным периодом T, равным 12,5 ч [1]. Частота трения ω^* изменяется в пределах от 10^{-4} на мелководье до 10^{-7} $с^{-1}$ в открытом океане [13]. Положим для определенности $\omega^* = 1{,}4 \cdot 10^{-5}$ $с^{-1}$. Тогда $r = 0{,}1$. На рис. 1 и 2 приведены безразмерные амплитуды первых трех гармоник в за-

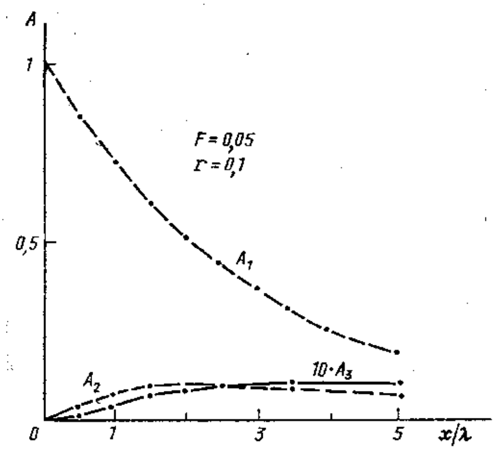

Рис. 1

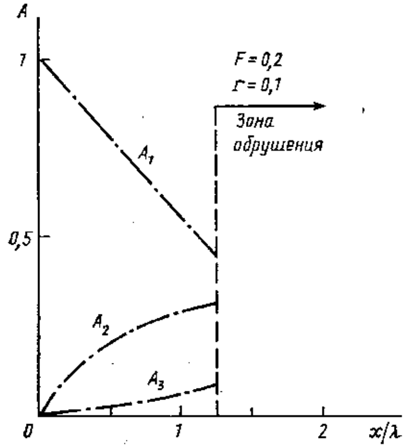

Рис. 2

висимости от расстояния, пройденного по шельфу, выраженного в длинах волн основной гармоники λ, при двух различных уровнях прилива в открытом океане. В первом случае F удовлетворяет (15) и ударной волны не образуется даже при бесконечном путешествии по шельфу. Максимум амплитуды второй гармоники достигается при $x = 1{,}5\lambda$, третьей — при $x = 3{,}5\lambda$. Однако и в точках своего максимума они много меньше первой. В дальнейшем характер поведения кривых выравнивается за счет быстрого затухания первой гармоники. Но это отвечает длинам волн, уже не встречающимся в действительности (в нашем примере при $H = 10$ м, $c = 9{,}9$ м·$с^{-1}$ и $T = 12{,}5$ ч имеем длины волн λ около 444 км). На рис. 2 амплитуда входной волны, соответствующая глубоководному приливу, несколько выше порога образования ударных волн и обрушение происходит при $x = 1{,}3\lambda$. Легко обнаружить, что гармоники в этом случае растут значительно быстрее, чем в первом.

В заключение отметим, что в геофизической гидродинамике по проблемам разрушения и диссипации гравитационных волн имеется обширная литература (см., напр., обзоры [14, 15]). В частности, к настоящему времени весьма подробно исследованы уравнения теории мелкой воды без донного трения ($\omega^* = 0$), но с учетом так называемой реактивной дисперсии [16] (уравнения (1), (2) сводятся в этом случае к уравнению Кортевега—де Фриза [17]). В работах [18—20] уравнения (1), (2) при $\omega^*=0$ дополняются не только реактивной высокочастотной дисперсией, но и трением о боковые стенки канала: в (10) появляются дисперсионный член βu_{xxx} и член с трением νu_{xx}. Получающиеся решения в виде затухающих кноидальных волн и солитонов описывают волнистый (ундулярный) бор.

Легко показать [14, 15], что отношение нелинейности к реактивной дисперсии определяется параметром Урселла [21, 22]

$$\mathrm{Ur}=a\lambda^2/H^3.$$

Здесь a и λ — амплитуда и длина начального возмущения. Если $\mathrm{Ur}\ll 1$, то нелинейностью можно пренебречь. Получаемое в этом случае линейное уравнение при $\omega^*=0$ и $\nu\neq 0$ имеет точное решение, которое описывает расплывание начального возмущения [15]. В частности, на больших расстояниях максимальной является головная волна, ее амплитуда убывает как $t^{-1/3}(x^{-1/3})$, а длина растет как $\lambda\sim t^{1/3}(x^{1/3})$. За головной волной располагается осциллирующий цуг волн с уменьшающейся амплитудой и периодом.

При $\mathrm{Ur}\gg 1$ реактивной дисперсией можно пренебречь. Этот случай реализуется для приливных волн на мелководье, так как для волны M_2, например, при $H=10$ м, $a=0{,}5$ м и $\lambda=400$ км имеем $\mathrm{Ur}\sim 10^8\gg 1$. При распространении приливных волн вне узких каналов можно не учитывать и трение о его стенки, считая $\nu=0$. Таким образом, мы приходим к постановке задачи, описываемой уравнениями (1), (2).

В линейном случае уравнения (1), (2) сводятся к телеграфному уравнению, решения которого представляют экспоненциально затухающие по мере движения по мелководью длинные волны. Затухание оказывается тем больше, чем больше донное трение (своего рода скин-эффект длинных волн [23]). При этом возникает также явление дисперсии длинных волн на шельфе: фазовая скорость волн становится зависимой от частоты [23, 24]. Дисперсионная кривая показывает, что эта зависимость существенна только для низкочастотных волн ($\omega\to 0$). Потери на трение и фазовая скорость этих волн заметно зависят от частоты (имеет место оптическая аналогия [24]). Для более высокочастотных волн ($\omega\to\infty$) имеет место ситуация, напоминающая акустику: дисперсия мала, но диссипация частотно-зависима [24, 25].

В нелинейном случае уравнения (1), (2) исследованы в настоящей статье. Полученное здесь решение описывает турбулентный бор, формирующийся на мелководье при обрушении и затухании длинной волны. Обобщение разложения Бесселя—Фубини на случай учета донного трения позволяет проанализировать также наблюдаемые спектры длинных приливных гармонических волн на шельфах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимов В. В., Куликов Е. А., Рабинович А. Б., Файн И. В. Волны в пограничных областях океана. Л., 1985. [2] Munk W. H., Bullard E. C.//J. Geophys. Res. 1963. 68, N 12. P. 3627. [3] Filloux J. H.//J. Phys. Oceanogr. 1980. 10, N 12. P. 1959. [4] Герман В. Х., Левиков С. П. Вероятностный анализ и моделирование колебаний уровня моря. Л., 1988. [5] Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л., 1947. [6] Арсеньев С. А., Шелковников Н. К. Деп. ВИНИТИ № 10-В89 от 02.01.89. [7] Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами. Горький, 1982. [8] Шулейкин В. В. Физика моря. М., 1968. [9] Brown W. S., Trusk R. P.//J. Phys. Oceanogr. 1980. 10, N 11. P. 1742. [10] Зырянов В. Н., Музылев С. В.//ДАН СССР. 1988. 298, № 2. С. 454. [11] Арсеньев С. А.//Тр. Совещ. по прогнозу цунами. Обнинск, 1988. С. 16. [12] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М., 1981. Т. 1. [13] Арсеньев С. А., Шелковников Н. К.//Метеорология и гидро-

логия. 1985. № 1. С. 77. [14] Перегрин Д. Нелинейные волновые процессы. М., 1987. С. 37. [15] Вольцингер А. Е., Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л., 1989. [16] Миллер М. А., Островский Л. А.//Физическая энциклопедия. М., 1988. Т. 1. С. 325. [17] Korteweg D. J., de Vries G.//Phil. Mag. and J. of Science. 1895. 39, series 5. P. 422. [18] Пелиновский Е. Н.//Журн. прикл. механики и техн. физики. 1971. № 2. С. 68. [19] Johnson R. S.//Phys. Fluids. 1972. 15. P. 1693. [20] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. [21] Ursell F.//Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. 49. P. 685. [22] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. М., 1980. [23] Арсеньев С. А.//Тр. Совещ. по прогнозу цунами. Обнинск, 1988. С. 19. [24] Арсеньев С. А., Шелковников Н. К. Динамика вод шельфов. М., 1989. [25] Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Л., 1982.

Поступила в редакцию
21.03.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 3

АСТРОНОМИЯ

УДК 524.47

ШАРОВОЕ СКОПЛЕНИЕ *M*15: ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИОННОЙ ФОКУСИРОВКИ

М. Ю. Маслаков

(ГАИШ)

Проведено исследование центральной части шарового звездного скопления *M*15 для поиска эффектов гравитационной фокусировки. Путем сравнения величины дисперсии яркости звезд центральной части скопления, где вероятность данного процесса больше, с дисперсией в удаленной от центра области установлена возможность существования этого эффекта. Методом максимального правдоподобия произведена оценка величин дисперсий.

Введение

Целью настоящей работы является изучение эффектов гравитационной фокусировки (ГФ) электромагнитного излучения в шаровом звездном скоплении. Из теоретического анализа данного явления, выполненного М. В. Сажиным [1], следует, что шаровые скопления являются областями, наиболее благоприятными для реализации условий, приводящих к возникновению эффекта гравитационной фокусировки. В анализируемой схеме гравитационными линзами (ГЛ) могут быть невидимые непосредственно звезды, принадлежащие к нижней части главной последовательности диаграммы Герцшпрунга—Рессела, предположительно существующие в скоплении белые карлики и нейтронные звезды. Проходя достаточно близко в картинной плоскости возле звезды, линза своим гравитационным полем фокусирует излучение последней. Под фокусировкой в данном случае подразумевается возмущение, вносимое гравитационным полем линзы. Оно не является полным аналогом обычной оптической фокусировки, но из-за ряда сходных черт получило такое определение. Эта фокусировка в свою очередь приводит к увеличению яркости звезды.

Явление гравитационной линзы было впервые открыто во внегалактической астрономии, хотя исторически сначала рассматривалось для звезд Галактики [2]. Оценка вероятности наблюдения этого эффекта среди звезд нашей Галактики показала, что она очень мала. Не оспари-