УДК 521.13

# УСТОЙЧИВОСТЬ ОРБИТ МАЛЫХ ПЛАНЕТ ВНЕШНЕЙ ЧАСТИ КОЛЬЦА АСТЕРОИДОВ

**И. А. Герасимов, Н. В. Ракитина**

*(ГАИШ)*

**В рамках плоской круговой ограниченной задачи трех тел показано, что в случае резонансов первого порядка астероиды, неустойчивые по Хиллу, все-таки могут иметь устойчивые орбиты. Для группы астероидов Гильды вычислены пределы и периоды изменения эксцентриситетов.**

Рассмотрим плоскую круговую ограниченную задачу трех тел. Массу центрального тела примем за единицу, масса возмущающего тела $P'$ пусть будет $\mu \ll 1$. За единицу длины примем радиус орбиты $P'$, а остальные единицы подберем так, чтобы гравитационная постоянная $f=1$.

Будем рассматривать астероиды, средние движения которых $n$ в начальный момент времени $t_0$ для некоторого целого числа $j$ и среднее движение $n'$ тела $P'$ удовлетворяют неравенству

$$|jn-(j+1)n'| \leqslant O(\sqrt{\mu}), \tag{1}$$

т. е. имеет место соизмеримость первого порядка.

Здесь и в дальнейшем для элементов орбит астероидов использованы обычные обозначения, а элементы тела $P'$ отмечены штрихом.

## 1. Уравнения движения

Введем переменные $p=e\cos s$, $q=e\sin s$, где $s=jM-(j+1)\times\times(M'-\omega)$ — аномалия Делоне. Тогда уравнения движения примут вид [1]:

$$\frac{dq}{d\tau}=\frac{\partial F}{\partial p},\quad \frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial F}{\partial q}, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}
F=(p^2+q^2)^2+A(p^2+q^2)+A_j p,\\
\tau=\frac{C_2}{\sqrt{\gamma}}(t-t_0),\quad A=\frac{C_1+\mu B}{C_2},\quad A_j=\frac{\mu B_j}{C_2},\\
B=\frac{\gamma^2}{8}\frac{d^2}{d\gamma^2}L_1^{(0)}(\gamma)-\frac{\gamma(2j-1)}{4}\frac{d}{d\gamma}L_1^{(0)}(\gamma),\\
B_j=-\frac{1}{2}\left[2(j+1)L_1^{(j+1)}(\gamma)+\gamma\frac{d}{d\gamma}L_1^{(j+1)}(\gamma)\right],\\
C_1=\frac{1}{2\gamma}\left[j-(j+1)\gamma^{3/2}\sqrt{1+\mu}\right],\\
C_2=\frac{j+1}{8\gamma}\left[j+(2j-1)\gamma^{3/2}\sqrt{1+\mu}\right].
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\gamma=a\left(j+1-j\sqrt{1-e^2}\right)^2$ — первый интеграл задачи.

В зависимости от значения $\gamma$ система (2) может иметь либо одно ($e_1$ при $\gamma<\gamma_1$), либо три ($e_1$, $e_2$, $e_3$ при $\gamma>\gamma_1$) стационарных решения (рис. 1). Следовательно, на фазовой плоскости можно выделить четыре типа траекторий. В работе [2] они приведены для резонанса 2:1.

## 2. Качественный анализ

В рамках поставленной задачи из астероидов группы Гильды, согласно [3], были выбраны те, для которых наклон к плоскости орбиты Юпитера $i\leqslant 5°$. Таких астероидов оказалось восемнадцать.

Для этих астероидов были вычислены значения $u(e)$ и $u(e_3)$, где $u$ — постоянная интеграла энергии:

$$F=-u.$$

Оказалось, что все астероиды группы Гильды принадлежат I или IV типу, так как $u(e)>u(e_3)$ [4], т. е. они находятся вблизи стационарного решения $e_1$, а следовательно, их движение является либрационным. Так что к ним применим аппарат функций Якоби, изложенный в работе [5]. С его помощью были вычислены пределы изменения эксцентриситетов орбит и максимальное значение $s$ (таблица и рис. 1).

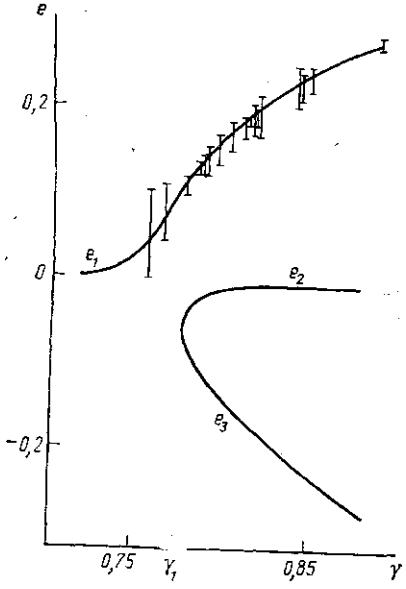


Рис. 1

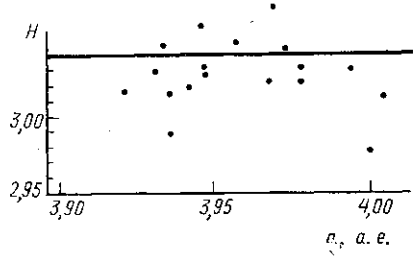


Рис. 2

| Номер астероида | $S_{max}$ | $a_{max}$ | $a_{min}$ | $e_{max}$ | $e_{min}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1578 | 57,60 | 4,030 | 3,890 | 0,244 | 0,204 |
| 3290 | 39,46 | 3,983 | 3,916 | 0,152 | 0,120 |
| 1162 | 20,72 | 3,962 | 3,931 | 0,117 | 0,098 |
| 1269 | 96,38 | 3,994 | 3,884 | 0,107 | 0,044 |
| 1748 | 44,09 | 4,014 | 3,905 | 0,240 | 0,209 |
| 2624 | 12,80 | 3,962 | 3,936 | 0,135 | 0,124 |
| 2067 | 10,20 | 3,968 | 3,942 | 0,187 | 0,180 |
| 1202 | 68,66 | 4,030 | 3,884 | 0,213 | 0,164 |
| 1911 | 29,99 | 3,983 | 3,921 | 0,189 | 0,166 |
| 1941 | 42,83 | 4,040 | 3,905 | 0,305 | 0,275 |
| 499 | 41,96 | 4,014 | 3,905 | 0,247 | 0,218 |
| 748 | 24,67 | 3,983 | 3,926 | 0,197 | 0,178 |
| 1439 | 43,63 | 3,994 | 3,910 | 0,166 | 0,132 |
| 3254 | 45,15 | 4,004 | 3,905 | 0,201 | 0,167 |
| 2959 | 19,18 | 3,999 | 3,936 | 0,285 | 0,279 |
| 2312 | 41,94 | 3,994 | 3,910 | 0,182 | 0,150 |
| 1268 | 26,38 | 3,973 | 3,926 | 0,144 | 0,122 |
| 334 | 115,24 | 3,982 | 3,862 | 0,098 | 0,000 |

### 3. Устойчивость орбит

Интеграл Якоби, выражаемый соотношением

$$V^2=2\Omega-H,$$

где $H$ — постоянная Якоби, определяет области возможного движения возмущаемого тела.

На рис. 2 показаны значения постоянной Якоби для выбранных астероидов группы Гильды. По оси абсцисс отложены значения большой полуоси в астрономических единицах. Сплошной линией обозначена постоянная Якоби для точки либрации $L_2$, расположенной за Юпитером. Из рис. 2 видно, что большинство рассматриваемых малых планет неустойчиво по Хиллу. Возникает вопрос: какова их дальнейшая судьба?

Для этого рассмотрим характер изменения взаимного расстояния астероид — Юпитер:

$$\Delta=\sqrt{r^2+1-2r\cos\varphi},$$

где $r=a(1-e^2)/(1+e\cos v)$, $\varphi=v-M'$, $v$ — истинная аномалия. Если $e$ мало, то несложно установить, что $\Delta$ имеет два экстремума, которые соответствуют нахождению малой планеты в афелии:

$v-M'=\pi$ и $\Delta$ максимально,

$v-M'=0$ и $\Delta$ минимально.

Так что если рассмотреть устойчивое решение $e_1$, для которого $s=0$, то для него $\Delta$ никогда не достигает своего минимального значения.

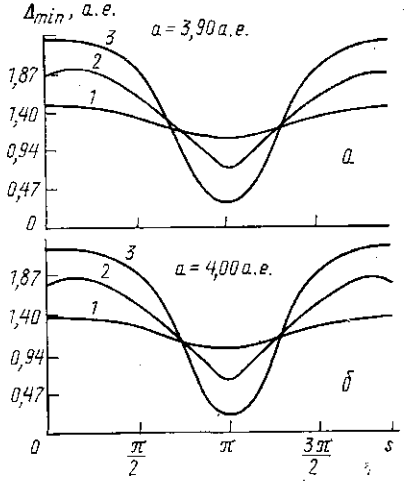


Рис. 3

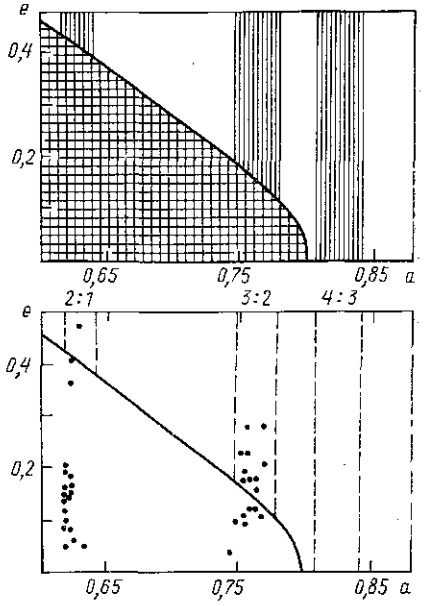


Рис. 4

Численное решение задачи также дает два экстремума. На рис. 3 представлены значения $\Delta_{min}$ для данного $s$ при различных начальных условиях: $a$=3,90 ($a$) и 4,00 а. е. ($б$) и $e$=0,05(1); 0,15(2) и 0,25(3).

Фазовые траектории рассматриваемых астероидов группы Гильды, как мы уже видели, являются либрационными. Значит, $\Delta$ для них не достигает критического значения, в качестве которого мы приняли величину $\Delta^*=1-a^*(1+e^*)$, где $a^*$, $e^*$ означают элементы граничной кривой, о которой речь пойдет ниже. (Если же $s$ может принимать значение $\pi$, то возможно тесное сближение малой планеты с Юпитером, сопровождаемое, как показывают численные расчеты, резким изменением значения $a$.) Интересно также отметить, что при изменении $s$ от 0 до 40° минимальное расстояние практически не изменяется.

На рис. 4 в координатах ($a$, $e$) представлены области устойчивости (по Хиллу). Значения больших полуосей $a$ даны в единицах большой полуоси Юпитера $a'$. Кривая соответствует астероидам, для которых при $r=a(1+e)$ и $\Delta=r+1$ значение постоянной Якоби достигает значения $H(L_2)$, т. е. объекты, соответствующие области под этой кривой, устойчивы. На нижнем рис. 4 точками обозначены астероиды групп Гекубы, Гильды, Туле, бóльшая часть которых не попадает в найденную область устойчивости. С учетом полученных выше результатов необходимо добавить еще три зоны устойчивости — это резонансные области, в которых астероиды также имеют устойчивые орбиты. На рис. 4 все области устойчивости отмечены штриховкой (ширина резонансных областей взята равной $2\sqrt{\mu}$).

Но кроме резонанса 4:3, которому отвечает астероид Туле, есть еще резонансы 5:4, 6:7 и т. д. Почему же эти зоны не выделены как устойчивые? Дело в том, что, начиная с резонанса 5:4, проявляется эффект перекрытия резонансных зон, который в свою очередь приводит к возникновению стохастической неустойчивости [6]. Последнее означает, что астероид может переходить из одной зоны в другую и в конце концов испытать тесное сближение с Юпитером.

Таким образом, во внешней части астероидного пояса резонансные эффекты приводят к устойчивости резонансных орбит, обладающих либрационным типом движения. Тела, обладающие иными начальными условиями, покидают эту область (данный вывод хорошо согласуется с работами численных исследований [7, 8]). Тем самым разрешается часто приводимый в литературе парадокс — почему в поясе астероидов в одних случаях резонансам отвечают сгущения, а в других — разрежения (или люки) малых планет. Последнее подтверждается также недавно обнаруженными люками внутри группы Гильды и астероидами троянской группы [9].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Герасимов И. А.//Тр. ГАИШ. 1988. **59**. С. 41. [2] Герасимов И. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. **29**, № 5. С. 71. [3] Эфемериды малых планет. 1986, ИТА АН СССР. [4] Герасимов И. А.//Астрон. журн. 1986. **63**. С. 768. [5] Герасимов И. А., Кирюшенкова Н. В.//Космич. исслед. 1989. **27**. С. 782. [6] Заславский Г. М., Чириков Б. В.//УФН. 1971. **105**, № 1. С. 3. [7] Lecar M., Franklin F.//IAU Symp. 1974. N 62. P. 37. [8] Milani A., Nobili A.//Astron. and Astrophys. 1985. **144**. P. 261. [9] Герасимов И. А., Винников Е. Л.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. **28**, № 5. С. 94.

Поступила в редакцию
25.07.89