Здесь $E_n$, $\vec{\mathcal{P}}$—собственные значения операторов $\widehat{H}, \widehat{\vec{\mathcal{P}}}$; $W_n = \langle n | W^{(0)} | n \rangle, V_{nm} = \langle n | \widehat{V} | m \rangle$.

Нетрудно показать, что положительность величины $\tau_s$ обеспечивает положительную определенность производства энтропии. Действительно, с учетом (16) уравнения движения для плотностей аддитивных интегралов движения $\bar{\zeta}_\alpha$ и сверхтекучего импульса $\mathbf{p}$ имеют вид

$$\dot{\bar{\zeta}}_\alpha = -\nabla_k \bar{\zeta}_{\alpha k} - \delta_{\alpha k} \frac{\rho_n v_{nk}}{\tau^s}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \nabla p_0.$$

Тогда для плотности энтропии $\sigma$, определяемой формулой $\sigma = -\omega + Y_\alpha \bar{\zeta}_\alpha$, получим уравнение

$$\dot{\sigma} + \operatorname{div} \sigma \mathbf{v}_n = \frac{Y_k^2}{Y_0 \tau_s} \rho_n \geqslant 0.$$

В заключение авторы выражают глубокую благодарность акад. Н. Н. Боголюбову и чл.-корр. АН УССР С. В. Пелетминскому за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bogoliubov N. N.//Physica, 1960. S26. P. 1. [2] Боголюбов Н. Н. Препринт ОИЯИ № Д781. Дубна, 1961; Избр. труды. Киев, 1971. Т. 3. С. 174. [3] Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946. [4] Гинзбург В. Л.//ЖЭТФ. 1961. 41, № 3. С. 828. [5] Enz C. P.//Rev. Mod. Phys. 1974. 46, N 4. P. 705. [6] Боголюбов Н. Н. (мл.), Ковалевский М. Ю., Пелетминский С. В. и др.//ЭЧАЯ. 1985. 16, № 4. С. 875. [7] Ахиезер А. И., Пелетминский С. В. Методы статистической физики. М., 1977. [8] Ковалевский М. Ю., Лавриненко Н. М., Пелетминский С. В., Соколовский А. И.//ТМФ. 1982. 50, № 3. С. 450.

Поступила в редакцию
04.11.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31. № 4

УДК 517.9

## О НЕКОТОРЫХ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

**А. В. Щепетилов**

*(кафедра математики)*

**Рассматривается краевая задача для квазилинейного параболического уравнения, описывающая процесс цементации при закалке стального образца. Проведено сравнение ее решения с решением аналогичной линейной задачи. Показано, что за счет выбора коэффициента диффузии, граничных и начальных условий в линейном случае можно получить двухстороннюю оценку решения нелинейной задачи через решения линейной.**

1. Одной из составных частей процесса термической обработки стали является цементация, представляющая собой диффузионное проникновение углерода внутрь железного образца при температурах порядка 1000°C [1]. Задача, описывающая этот процесс, имеет вид

$$\frac{\partial u}{dt}=\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), (\mathbf{x}, t)\in Q_T. \qquad (1)$$

$$\sum_i D(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} n_i=\beta(\mathbf{x})(u-C(t)), \quad (\mathbf{x}, t)\in \Gamma_T\setminus\Gamma_0, \qquad (2)$$

$$u(\mathbf{x}, 0)=\psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \qquad (3)$$

где $u$ — концентрация углерода в образце, занимающем область $\Omega\subset R^3$, $Q_T=\Omega\times(0, T)$, $\Gamma_0=Q_T\cap\{(\mathbf{x}, 0)\}$, $i=1, 2, 3$, $\Gamma_T$ — граница $Q_T$ без точек $(\mathbf{x}, T)$, $D$ — коэффициент диффузии, $\{n_1, n_2, n_3\}$ — внутренняя нормаль, $C(t)$ — концентрация углерода на границе образца. Будем предполагать, что $\Omega$ — односвязная ограниченная область с гладкой границей (например, класса $H^{2+\alpha}$ [2]). Математическое моделирование управления процессом цементации связано с многократным решением задачи (1)—(3) при различных $C(t)$ в рамках алгоритма минимизации некоторого целевого функционала.

В этой связи представляет интерес сравнение решения задачи (1)—(3) с решением задачи (4)—(6) с постоянным коэффициентом диффузии $M$, который будет выбран ниже:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=M\sum_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \quad (\mathbf{x}, t)\in Q_T, \qquad (4)$$

$$M\sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i=\beta(\mathbf{x})(v-\widetilde{C}(t)), \quad (\mathbf{x}, t)\in \Gamma_T\setminus\Gamma_0, \qquad (5)$$

$$v(\mathbf{x}, 0)=\widetilde{\psi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\Omega. \qquad (6)$$

Теорема сравнения решения квазилинейных параболических уравнений и неравенств с первыми краевыми условиями получена в [3]. В [4] изложена методика сравнения решений квазилинейных параболических уравнений с первыми краевыми условиями, использующая априорные оценки второй пространственной производной. Целью настоящей работы является распространение результатов такого рода на частную задачу (1)—(3) с краевыми условиями третьего рода. Коэффициент диффузии для процесса цементации хорошо аппроксимируется выражением вида $D(u)=a+bu$, $a>0$, $b>0$. Такой коэффициент диффузии и будет фигурировать всюду в дальнейшем.

2. Далее будет использована следующая теорема, являющаяся модификацией теоремы сравнения параболических неравенств из [5].

Теорема 1

Пусть $v(x, t)$, $w(x, t)\in C^{2,1}_{x,t}(Q_T)$, $w$, $v\in C(\bar{Q}_T)$ и пусть $F(\mathbf{x}, t, \mathbf{p}, p_i, p_{ij})$, $i, j=1, 2, 3$, обладает ограниченной постоянной Липшица по трем последним аргументам и непрерывна по $\mathbf{x}$ и $t$ в области $E$, содержащей замыкание множества точек $(\mathbf{x}, t, p, p_i, p_{ij})$, в котором

$$(\mathbf{x}, t)\in Q_T, \quad p\in(v, w), \quad p_i\in\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right), \quad p_{ij}\in\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j}\right).$$

Предположим, что $\partial F/\partial p_{hk}$ — положительная полуопределенная матрица. Если

$$\frac{\partial v}{\partial t}\geqslant F\left(x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}\right), \quad (\mathbf{x}, t)\in Q_T,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant F\left(\mathbf{x},\, t,\, w,\, \frac{\partial w}{\partial x_i},\, \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}\right),\ (\mathbf{x},\, t) \in Q_T. \tag{7}$$

$$v(\mathbf{x},\, t) \geqslant w(\mathbf{x},\, t),\ (\mathbf{x},\, t) \in \Gamma_0. \tag{8}$$

$$\sum_i \frac{\partial v}{\partial x_i} n_i + \eta(\mathbf{x},\, t,\, v) \leqslant \sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} n_i + \eta(\mathbf{x},\, t,\, w),\ (\mathbf{x},\, t) \in \Gamma_T \diagdown \Gamma_0, \tag{9}$$

где $\eta(.,\, .,\, .)$ — произвольная функция, обладающая ограниченной постоянной Липшица по третьему аргументу, изменяющемуся в $E$. Тогда

$$v(\mathbf{x},\, t) \geqslant w(\mathbf{x},\, t),\ (\mathbf{x},\, t) \in Q_T.$$

3. Будем предполагать, что в условиях задач (1)—(3) и (4)—(6) $\beta(\mathbf{x})$ имеет непрерывную по Гельдеру с показателем $\alpha$ производную, $C(t)$ и $\tilde{C}(t)$ непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha/2$ и выполнены условия согласования граничных и начальных данных:

$$\sum_i D(\psi(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} n_i = \beta(\mathbf{x})(\psi(\mathbf{x}) - C(0)),\ \mathbf{x} \in S,$$

$$M \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} n_i = \beta(\mathbf{x})(\tilde{\psi}(\mathbf{x}) - \tilde{C}(0)),\ \mathbf{x} \in S.$$

Эти условия обеспечивают согласно [2] однозначную разрешимость в классическом смысле задач (1)—(3) и (4)—(6). Кроме того, для задач (1)—(3) и (4)—(6) справедлив принцип максимума, поэтому существует постоянная $q$, определяемая только максимумами функций $C$, $\tilde{C}$, $\psi$, $\tilde{\psi}$, такая, что выполнено неравенство

$$u(\mathbf{x},\, t),\ v(\mathbf{x},\, t) \leqslant q,\ (\mathbf{x},\, t) \in Q_T. \tag{10}$$

4. Лемма

Пусть $u(\mathbf{x},\, t)$ — решение задачи (1)—(3) и выполняются неравенства

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(D(\psi(\mathbf{x})) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right) \geqslant 0,\ \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} \geqslant 0,\ t \in (0,\, T). \tag{11}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0,\ (\mathbf{x},\, t) \in Q_T,$$

$$\sum_i D(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i = \beta(\mathbf{x})(u - C(t)) \leqslant 0,\ (\mathbf{x},\, t) \in \Gamma_T \diagdown \Gamma_0.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 из работы [4, гл. 5] с учетом теоремы 1 и условия (11). Рассмотрим $z(\mathbf{x},\, t)$:

$$u = \Phi(z) \equiv \frac{\sqrt{a^2 + 2bD(q)z} - a}{b},\ \Phi' \geqslant 0,\ \Phi(0) = 0,\ \Phi(p) \geqslant p, \tag{12}$$

$\Phi$ осуществляет взаимно-однозначное монотонное отображение $[0, \infty)$ на себя. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\frac{D(q)}{\sqrt{a^2+2bD(q)z}}\,\frac{\partial z}{\partial x_i},$$

$$D(u)=a+bu=\sqrt{a^2+2bD(q)z},$$

$z$ удовлетворяет задаче (13)—(15):

$$\frac{\partial z}{\partial t}=D(\Phi(z))\sum_i\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2},\ (\mathbf{x}, t)\in Q_T, \tag{13}$$

$$D(q)\sum_i\frac{\partial z}{\partial x_i}n_i=\beta(x)(\Phi(z)-C(t)),\ (\mathbf{x}, t)\in\Gamma_T\setminus\Gamma_0, \tag{14}$$

$$z(x, 0)=\Phi^{-1}(\psi(x)),\ \mathbf{x}\in\Omega. \tag{15}$$

Теорема 2

Пусть для задачи (1)—(3) выполнены условия леммы. Функции, входящие в постановку задач (1)—(3) и (4)—(6), удовлетворяют условиям

$$\widetilde{C}(t)\geqslant C(t),\ \widetilde{\psi}(\mathbf{x})\geqslant\psi(\mathbf{x}),\ M=D(q). \tag{16}$$

Тогда

$$u(\mathbf{x}, t)\leqslant\frac{\sqrt{a^2+2bD(b)v}-a}{b},\ (\mathbf{x}, t)\in Q_T.$$

*Доказательство*

$$\sum_i D(q)\frac{\partial z}{\partial x_i}n_i-\beta\Phi(z)=\sum_i D(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}n_i-\beta u=-\beta C(t)\geqslant$$

$$-\beta\widetilde{C}(t)=\sum_i M\frac{\partial v}{\partial x_i}n_i-\beta v=\sum_i D(q)\frac{\partial v}{\partial x_i}n_i-\beta v\geqslant$$

$$\geqslant\sum_i D(q)\frac{\partial v}{\partial x_i}n_i-\beta\frac{\sqrt{a^2+2bD(q)v}-a}{b} \tag{17}$$

в силу условий (10), (12), (16). Если $\partial u/dt\geqslant 0$, то и $\partial z/\partial t\geqslant 0$, а значит,

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\sum_i D(u)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\leqslant M\sum_i\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}, \tag{18}$$

$$z(\mathbf{x}, 0)=\Phi^{-1}(\psi(\mathbf{x}))\leqslant\psi(\mathbf{x})\leqslant\widetilde{\psi}(\mathbf{x}). \tag{19}$$

Условия (17), (18), (19) обеспечивают выполнение условий (9), (7), (8) соответственно по отношению к задачам (4)—(6) и (13)—(16), где в качестве $F$ выступает

$$F(p_{ij})=M\sum_i p_{ii}.$$

Значит,

$$z(\mathbf{x}, t) \leqslant v(\mathbf{x}, t), \ (\mathbf{x}, t) \in Q_T,$$

$$u = \Phi(z) \leqslant \Phi(v) = \frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bD(q)v} - a\right).$$

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 3

Пусть для задачи (1)—(3) выполнены условия леммы. Кроме того, выполнены неравенства

$$\tilde{C}(t) \leqslant C(t),$$

$$0 \leqslant \tilde{\psi}(\mathbf{x}) \leqslant \psi(\mathbf{x}),$$

$$M = a.$$

Тогда

$$\frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bav} - a\right) \leqslant u, \ (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Таким образом, обозначая решение задачи (4)—(6) при условиях теоремы 2 через $v_q$, а при условиях теоремы 3 — через $v_a$, получаем

$$\frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bav_a} - a\right) \leqslant u(\mathbf{x}, t) \leqslant \frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bD(q)v_q} - a\right).$$

В заключение автор выражает свою признательность проф. В. Б. Гласко за предложенную задачу и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуляев А. П. Металловедение. М., 1966. [2] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. [3] Kaplan S.//Comm. Pure and Appl. Math. 1963. **16**. P. 305. [4] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987. [5] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. 1968.

Поступила в редакцию
10.11.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31. № 4

УДК 539.129

## ФЕРМИОНЫ В ПОЛЕ ААРОНОВА—БОМА: РАССЕЯНИЕ И СПИНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

**Д. В. Гальцов, С. А. Воропаев**

*(кафедра теоретической физики)*

**Рассматриваются особенности рассеяния квантовых релятивистских частиц со спином 1/2 в калибровочном поле Ааронова—Бома. С этой целью используется модель соленоида радиуса $a$ с последующим предельным переходом $a \to 0$, причем сохраняется магнитный поток. Показано, что существует воздействие электромагнитного потенциала на начальное спиновое состояние частицы.**

Исследование математической структуры квантовой теории показало, что если система $S$ локализована в топологически нетривиальном многообразии $M$, то некоторые наблюдаемые физические величи-