Значит,

$$z(\mathbf{x}, t) \leqslant v(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T,$$

$$u = \Phi(z) \leqslant \Phi(v) = \frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bD(q)v} - a\right).$$

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 3

Пусть для задачи (1)—(3) выполнены условия леммы. Кроме того, выполнены неравенства

$$\widetilde{C}(t) \leqslant C(t),$$

$$0 \leqslant \widetilde{\psi}(\mathbf{x}) \leqslant \psi(\mathbf{x}),$$

$$M = a.$$

Тогда

$$\frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bav} - a\right) \leqslant u, \quad (\mathbf{x}, t) \in Q_T.$$

Таким образом, обозначая решение задачи (4)—(6) при условиях теоремы 2 через v_q, а при условиях теоремы 3 — через v_a, получаем

$$\frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bav_a} - a\right) \leqslant u(\mathbf{x}, t) \leqslant \frac{1}{b}\left(\sqrt{a^2 + 2bD(q)v_q} - a\right).$$

В заключение автор выражает свою признательность проф. В. Б. Гласко за предложенную задачу и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гуляев А. П. Металловедение. М., 1966. [2] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. [3] Kaplan S.//Comm. Pure and Appl. Math. 1963. **16**. P. 305. [4] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987. [5] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. 1968.

Поступила в редакцию
10.11.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31. № 4

УДК 539.129

ФЕРМИОНЫ В ПОЛЕ ААРОНОВА—БОМА: РАССЕЯНИЕ И СПИНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ

Д. В. Гальцов, С. А. Воропаев

(кафедра теоретической физики)

Рассматриваются особенности рассеяния квантовых релятивистских частиц со спином 1/2 в калибровочном поле Ааронова—Бома. С этой целью используется модель соленоида радиуса a с последующим предельным переходом $a \to 0$, причем сохраняется магнитный поток. Показано, что существует воздействие электромагнитного потенциала на начальное спиновое состояние частицы.

Исследование математической структуры квантовой теории показало, что если система S локализована в топологически нетривиальном многообразии M, то некоторые наблюдаемые физические величины S будут «чувствовать» глобальные свойства M [1—3]. Одним из первых указаний возможности такого «топологического» воздействия на квантовые процессы было открытие Аароновым и Бомом в 1959 г. особой роли электромагнитных потенциалов в квантовой механике [4].

Наиболее ярким проявлением эффекта Ааронова—Бома является возникновение расходящейся цилиндрической волны при рассеянии квантовой частицы на бесконечно тонком соленоиде, содержащем магнитный поток $\Phi=\mathrm{const}$. Движение происходит в области пространства, где напряженности внешнего электромагнитного поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ равны нулю, но вектор-потенциал A_μ отличен от нуля. Математически рассеяние обусловлено тем, что вмещающее многообразие $M=R^3-R^1$ обладает нетривиальной топологией [5].

До настоящего времени исследовался процесс указанного выше типа только для квантовой нерелятивистской частицы. Дифференциальное сечение рассеяния (на единицу длины соленоида) в данном случае определяется выражением [4]

$$\sigma(\varphi)=\frac{\sin^2(\pi\delta)}{2\pi k}\,\frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}, \tag{1}$$

где φ — угол в цилиндрической системе координат, ось OZ которой совпадает с осью соленоида; δ — дробная часть Φ/Φ_0, где $\Phi=2\pi\hbar c/e_0$ — квант магнитного потока. (Предполагается, что рассеиваемая частица первоначально двигалась вдоль линии отсчета φ и ее движение характеризуется волновым вектором $\mathbf{k}$.)

В настоящей работе изучается рассеяние квантовой релятивистской частицы со спином 1/2 (дираковский электрон) в аналогичном калибровочном поле. Учет спина в эффекте Ааронова—Бома производится с помощью «регуляризованной» модели: рассматривается соленоид конечного радиуса a с последующим предельным переходом $a\to 0$ и сохранением магнитного потока $\Phi=\mathrm{const}$. Показано, что в нерелятивистском пределе (электрон Паули) дифференциальное сечение рассеяния принимает вид (1), но будет существенно зависеть от ориентации спина частицы относительно оси соленоида.

Движение частицы в нашем случае описывается уравнением Дирака

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)=\widehat{H}_D\Psi(\mathbf{r},t), \tag{2}$$

где $\widehat{H}_D=c(\mathbf{d}\widehat{\mathbf{P}})+\rho_3Mc^2$, $\widehat{\mathbf{P}}=\widehat{\mathbf{p}}+(e_0/c)\mathbf{A}$ — «удлиненный» оператор импульса; $\mathbf{A}$ — вектор-потенциал магнитного поля соленоида, а e_0, M — абсолютный заряд и масса электрона [6]. Введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z), ось OZ которой совпадает с осью соленоида и сонаправлена напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля внутри него. Тогда

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_\varphi A_\varphi(\rho),\ \text{где}\ A_\varphi(\rho)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}H\rho, & \rho\leqslant a,\\[2ex] \dfrac{\Phi}{2\pi}\dfrac{1}{\rho}, & \rho>a.\end{cases} \tag{3}$$

Уравнение (2) эквивалентно следующей системе дифференциальных уравнений [6]:

$$\begin{cases}(E\mp Mc^2)\,\Psi_{1,3}-c\,(\widehat{P}_x-i\widehat{P}_y)\,\Psi_{4,2}-c\widehat{P}_z\Psi_{3,1}=0,\\ (E\mp Mc^2)\,\Psi_{2,4}-c\,(\widehat{P}_x+i\widehat{P}_y)\,\Psi_{3,1}+c\widehat{P}_z\Psi_{4,2}=0,\end{cases} \tag{4}$$

где

$$\widehat{P}_x \mp i\widehat{P}_y = (-i\hbar)\exp\{\mp i\varphi\}\left[\frac{\partial}{\partial\rho} \mp i\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\frac{e_0}{\hbar c}A_\varphi(\rho)\right)\right].$$

Здесь мы предположили, что возможно стационарное решение для волновой функции в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \exp\left\{-i\varepsilon\frac{E}{\hbar}t\right\}\Psi(\mathbf{r});$$

в дальнейшем берется $\varepsilon=1$ (электрон), а Ψ_i, $i=\overline{1, 4}$, — спинорные компоненты $\Psi(\mathbf{r})$.

Будем искать решение (4) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = C_N \exp\{iK_3 z\}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\{im\varphi\}\begin{pmatrix} R_1^{(m)}\exp\{-i\varphi\} \\ R_2^{(m)}(\rho) \\ R_2^{(m)}(\rho)\exp\{-i\varphi\} \\ R_4^{(m)}(\rho)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где C_N фиксируется нормировкой, C_m определяется «асимптотическим» поведением волновой функции при $\rho\to\infty$.

Подставляя $\Psi(\mathbf{r})$ в виде (5) в систему уравнений (4) и учитывая зависимость $A_\varphi(\rho)$ (3), получаем

1) при $\rho\leqslant a$

$$R_{3,1}^{(m)}(\rho) = \overline{C}_{3,1}\left[A_{3,1}^{(m)}\exp\{-\xi/2\}\xi^{|m-1|/2}\Phi\left(-\lambda + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{|m-1|+m+1}{2};\ 1+|m-1|;\xi\right)\right], \tag{6}$$
$$R_{4,2}^{(m)}(\rho) = \overline{C}_{4,2}\left[A_{4,2}^{(m)}\exp\{-\xi/2\}\xi^{|m|/2}\Phi\left(-\lambda+\frac{|m|+m}{2};\ 1+|m|;\xi\right)\right],$$

где

$$\xi=\gamma\rho^2,\quad \gamma=\frac{e_0H}{2c\hbar},\ \lambda=\frac{(E)^2-(Mc^2)^2-(K_3)^2}{(c\hbar)^2 4\gamma};$$

$$\Phi(a; b; x) = 1+\frac{a}{b}x+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

— вырожденная гипергеометрическая функция [7];

2) при $\rho > a$

$$R_{3,1}^{(m)}(\rho) = \overline{C}_{3,1}[J_{|\widetilde{m}-1|}(k\rho) + B_{3,1}^{(m)}H^{(1)}_{\widetilde{m}-1}(k\rho)],$$
$$R_{4,2}^{(m)}(\rho) = \overline{C}_{4,2}[J_{|\widetilde{m}|}(k\rho) + B_{4,2}^{(m)}H^{(1)}_{\widetilde{m}}(k\rho)], \tag{7}$$

где $k^2=[(E)-(Mc^2)^2-K_3^2]/(c\hbar)^2$; $J_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$ — функции Бесселя и Ханкеля первого рода соответственно [7], а $\widetilde{m}=m+f$ и $f=\Phi/\Phi_0$. В выражениях (6) и (7): $\overline{C}_i$ — спиновые коэффициенты, «подправляемые» условием асимптотического поведения волновой функции (см. (8)); $A_i^{(m)}$, $B_i^{(m)}$ — коэффициенты, определяемые сравнением указанных выше решений для волновой функции на границе соленоида в точке $\rho=a$.

Будем предполагать, что $\Psi(\mathbf{r})$ имеет следующий вид при $\rho\to\infty$:

$$\Psi(\mathbf{r})|_{\rho\to\infty}\cong\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}\exp\{i(\mathbf{kr})\}+f(\varphi)\frac{\exp\{ik\rho\}}{\sqrt{\rho}}\exp\{iK_3z\}.$$

Пользуясь известными формулами при $J_\nu(x)$ и $H_\nu^{(1)}(x)$ при $x\to\infty$ [7], получаем

$$\begin{cases}C_m=\exp\{im(\pi-\varphi_\perp)\}\exp\left\{-i\frac{\pi}{2}|\widetilde{m}|\right\},\\ \overline{C}_{2,4}=C_{2,4},\\ \overline{C}_{3,1}=\exp\left\{i\frac{\pi}{2}(|\widetilde{m}|-|\widetilde{m}-1|)\right\}\exp\{i(\pi-\varphi_\perp)\}C_{1,3},\end{cases}\tag{8}$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор рассеиваемой частицы и в цилиндрической системе координат,

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})=k\rho\cos(\varphi-\varphi_\perp)+K_3z;$$

C_i — точные коэффициенты, характеризующие начальное спиновое состояние электрона.

В предельном случае бесконечно тонкого соленоида при $(ka)^2\to0$ условие непрерывности радиальной волновой функции и ее первой производной в точке $\rho=a$ показывает, что

$$\begin{cases}B_{1,3}^{(m)}\cong(ka)^{2|\widetilde{m}-1|}\to0\quad\forall\widetilde{m},\\ B_{2,4}^{(m)}\cong(ka)^{2|\widetilde{m}|}\to0\quad\forall\widetilde{m},\ \text{кроме}\ \ \widetilde{m}=\delta,\\ B_{2,4}^{(m)}=i\sin(\pi\delta)\exp\{i\pi\delta\},\quad\widetilde{m}=\delta.\end{cases}\tag{9}$$

Учитывая значения C_m (8) и $B_i^{(m)}$ (9), получаем следующий асимптотический вид $\Psi(\mathbf{r})$ $(\varphi\neq\varphi_\perp,\ \theta=\pi-\varphi_\perp+\varphi)$:

$$\Psi(\mathbf{r})|_{\rho\to\infty}\cong\Psi(\mathbf{r})_{\text{in}}+\Psi(\mathbf{r})_{\text{sc}}^{\text{АБ}},$$

где

$$\Psi(\mathbf{r})_{\text{in}}=C_N\exp\{i(\mathbf{kr})\}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}\exp\{if\theta\}\tag{10}$$

— «падающая» свободная волна;

$$\Psi(\mathbf{r})_{\text{sc}}^{\text{АБ}}=\sqrt{\frac{1}{2\pi k\rho}}\exp\{ik\rho\}\exp\{-iN\theta\}\exp\left\{i\frac{\pi}{4}\right\}\sin(\pi\delta)\times$$
$$\times\frac{\exp\{i\theta/2\}}{\cos(\theta/2)}\begin{pmatrix}C_1\\C_2[2\exp\{i\theta/2\}\cos(\theta/2)-1]\\C_3\\C_4[2\exp\{i\theta/2\}\cos(\theta/2)-1]\end{pmatrix}$$

— рассеянная цилиндрическая волна, обусловленная эффектом Ааронова—Бома (N — целая часть f). Выражение $\Psi(\mathbf{r})_{\text{sc}}^{\text{АБ}}$ в (10) дает нам точное общее значение амплитуды рассеяния дираковского электрона на бесконечно тонком соленоиде для произвольных значений энергии E и волнового вектора $\mathbf{k}$ частицы. Сравнивая $\Psi(\mathbf{r})_{\text{in}}$ и $\Psi(\mathbf{r})_{\text{sc}}^{\text{АБ}}$, легко заметить, что в общем случае $C_i \neq 0$ спин при рассеянии не сохраняется.

Рассмотрим важный частный случай, когда $E \to Mc^2 + \varepsilon$, т. е. нерелятивистский электрон Паули. Будем различать спиновые состояния частицы по ориентации спина вдоль (против) оси $OZ - \zeta = +1(-1)$. Тогда, если скорость движения частицы $v \ll c$:

$$\begin{cases} |C_1|^2 \cong 1, \\ |C_2|^2 \cong |C_3|^2 \cong |C_4|^2 \cong o\left[\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \text{ при } \zeta = +1 \end{cases}$$

и (11)

$$\begin{cases} |C_2|^2 \cong 1, \\ |C_1|^2 \cong |C_3|^2 \cong |C_4|^2 \cong o\left[\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] \text{ при } \zeta = -1. \end{cases}$$

Из вида $\Psi(\mathbf{r})_{\text{sc}}^{\text{АБ}}$ (10), учитывая значения C_i (11), получаем следующие выражения для дифференциального сечения рассеяния:

$$\sigma_{\text{АБ}}^{(+)}(\varphi) \cong \frac{\sin^2(\pi\delta)}{2\pi}\left[\frac{1}{\cos^2(\varphi/2)} + o\left(\frac{\varepsilon}{Mc^2}\right)\right] \text{ при } \zeta = +1,$$

$$\sigma_{\text{АБ}}^{(-)}(\varphi) \cong \frac{\sin^2(\pi\delta)}{2\pi}\left[\frac{1}{\cos^2(\varphi/2)} - o\left(\frac{\varepsilon}{Mc^2}\right)\right] \text{ при } \zeta = -1.$$

(Здесь мы положили $\varphi_\perp = \pi$, т. е., как и в работе [4], рассеиваемая частица движется вдоль линии отсчета φ, см. (1).)

Мы видим, что для нерелятивистского электрона начальное спиновое состояние не разрушается под воздействием эффекта Ааронова—Бома, но дифференциальное сечение рассеяния меняется в зависимости от ориентации спина относительно оси соленоида. Величина $\sigma_{\text{АБ}}^{(0)}(\varphi)$ — среднее от $\sigma_{\text{АБ}}^{(+)}(\varphi)$ и $\sigma_{\text{АБ}}^{(-)}(\varphi)$ — будет характеризовать дифференциальное сечение рассеяния (на единицу длины соленоида) неполяризованной частицы на магнитном потоке [8]:

$$\sigma_{\text{АБ}}^{(0)}(\varphi) \cong \frac{\sin^2(\pi\delta)}{2\pi k}\,\frac{1}{\cos^2(\varphi/2)}\left(1 + \frac{\varepsilon}{Mc^2}\cos^2(\varphi/2)\right),$$

что отличается от формулы Ааронова—Бома (1) множителем $(1 + [\varepsilon/(Mc^2)]\cos^2(\varphi/2))$. Этот множитель — поправка к полученному ими выражению для случая рассеяния бесспиновой квантовой нерелятивистской частицы, учитывающей спин электрона. Полное рассмотрение проблемы учета спина в эффекте Ааронова—Бома в общем виде требует привлечения формализма матрицы плотности для смешанного спинового состояния электрона [8], что будет представлено в следующей работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Olariu S., Popescu I.//Rev. Mod. Phys. 1985. 57, N 2. [2] Ph. de Sousa Gerbert, Jackiw R. MIT preprints: CTP 1594 & CTP 1653. 1988. [3] Doebner H. D., Elmers H. J., Heidenreich W. F.//J. Math. Phys. 1989. 30. P. 1053. [4] Aharonov Y., Bohm D.//Phys. Rev. 1959. 115. P. 485. [5] Райдер Л. Квантовая теория поля. М., 1987. [6] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский

электрон. М., 1983. [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 1, 2. [8] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.

Поступила в редакцию
30.11.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31. № 4

УДК 530.145:530.12; 537.8:530.145

ОБ ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ ДВУМЕРНОГО ГАЗА ЭЛЕКТРОНОВ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Р. Халилов

(кафедра теоретической физики)

Показано, что энергия Ферми двумерного газа электронов в магнитном поле квантована. Получены приближенные формулы для энергии основного состояния электронов в слабом и сильном магнитном полях с учетом взаимодействий между ними при нулевой температуре. Из полученных результатов следует, что в зависимости от соотношения между параметрами задачи (плотность электронов, напряженность магнитного поля, орбитальный момент относительного движения) в системе электронов могут происходить фазовые переходы. Найдена простая формула, связывающая степень заполнения уровня Ландау в сильном магнитном поле с орбитальным моментом пары электронов.

В последнее время получен целый ряд важных результатов, дающих ключ к решению задачи о движении двумерного газа электронов в сильном (квантующем) магнитном поле, которое, по-видимому, даст возможность адекватно описать интереснейшее квантовое макроскопическое явление — квантовый эффект Холла — и его связь с фундаментальными принципами квантовой физики. Здесь нам хотелось бы обратить внимание на некоторые новые стороны этого явления, которые, кажется, еще не обсуждались в литературе.

1. Квантование энергии Ферми двумерного газа

Рассмотрим двумерный газ электронов в сильном магнитном поле, предполагая, что его полный заряд нейтрализуется однородным положительным фоновым зарядом. Энергия Ферми электронного газа определяется плотностью электронов в плоскости движения

$$E_F = p_F^2/2m = 2\pi\hbar^2 N/(mL^2), \tag{1}$$

где N — полное число электронов, L^2 — занятая ими площадь, m — масса электрона, p_F — импульс Ферми.

Энергетические уровни электрона в магнитном поле напряженности H (уровни Ландау), направленном перпендикулярно плоскости движения, выражаются формулой

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \tag{2}$$

где $\omega = eH/(mc)$ — циклотронная частота, причем каждому значению главного квантового числа n соответствует

$$\Delta = eHL^2/(2\pi\hbar c) \tag{3}$$

состояний; Δ — кратность вырождения уровня.

Используя (1) и (3), представим энергию Ферми в виде

$$E_F = \hbar\omega\nu, \tag{4}$$