электрон. М., 1983. [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 1, 2. [8] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.

Поступила в редакцию
30.11.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31. № 4

УДК 530.145:530.12; 537.8:530.145

ОБ ОСНОВНОМ СОСТОЯНИИ ДВУМЕРНОГО ГАЗА ЭЛЕКТРОНОВ В КВАНТУЮЩЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Р. Халилов

(кафедра теоретической физики)

Показано, что энергия Ферми двумерного газа электронов в магнитном поле квантована. Получены приближенные формулы для энергии основного состояния электронов в слабом и сильном магнитном полях с учетом взаимодействий между ними при нулевой температуре. Из полученных результатов следует, что в зависимости от соотношения между параметрами задачи (плотность электронов, напряженность магнитного поля, орбитальный момент относительного движения) в системе электронов могут происходить фазовые переходы. Найдена простая формула, связывающая степень заполнения уровня Ландау в сильном магнитном поле с орбитальным моментом пары электронов.

В последнее время получен целый ряд важных результатов, дающих ключ к решению задачи о движении двумерного газа электронов в сильном (квантующем) магнитном поле, которое, по-видимому, даст возможность адекватно описать интереснейшее квантовое макроскопическое явление — квантовый эффект Холла — и его связь с фундаментальными принципами квантовой физики. Здесь нам хотелось бы обратить внимание на некоторые новые стороны этого явления, которые, кажется, еще не обсуждались в литературе.

1. Квантование энергии Ферми двумерного газа

Рассмотрим двумерный газ электронов в сильном магнитном поле, предполагая, что его полный заряд нейтрализуется однородным положительным фоновым зарядом. Энергия Ферми электронного газа определяется плотностью электронов в плоскости движения

$$E_F = p_F^2/2m = 2\pi\hbar^2 N/(mL^2), \tag{1}$$

где N — полное число электронов, L^2 — занятая ими площадь, m — масса электрона, p_F — импульс Ферми.

Энергетические уровни электрона в магнитном поле напряженности H (уровни Ландау), направленном перпендикулярно плоскости движения, выражаются формулой

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \tag{2}$$

где $\omega = eH/(mc)$ — циклотронная частота, причем каждому значению главного квантового числа n соответствует

$$\Delta = eHL^2/(2\pi\hbar c) \tag{3}$$

состояний; Δ — кратность вырождения уровня.

Используя (1) и (3), представим энергию Ферми в виде

$$E_F = \hbar\omega\nu, \tag{4}$$

где $\nu=N/\Delta$ — так называемый фактор заполнения уровней Ландау, равный (при целом ν) числу полностью заполненных уровней.

Из (4) видно, что энергия Ферми квантована; минимальный квант равен $\hbar\omega$, если ν — целое число. При фиксированном поле H энергию Ферми можно изменить, меняя ν только на целое число, т. е. целиком заполняя или освобождая некоторое число уровней Ландау. Квантованный холловский ток возникнет, если кроме магнитного поля на электроны действует в плоскости движения электрическое поле. Замечательно, что величина этого тока оказывается пропорциональной фактору заполнения уровней ν (см. [1—4]). Известно [2—4], что ν не обязательно целое число; в общем случае $\nu=j/s$, где j и s — целые числа, причем s — нечетное число и $j\neq s$.

2. **Роль обменных эффектов**

Вычислим энергию системы, учитывая взаимодействия электронов друг с другом и с нейтрализующим фоновым зарядом в присутствии слабого магнитного поля. Ввиду электрической нейтральности полной системы в результате останутся только недиагональные матричные элементы кулоновского потенциала, выражающие собой обменный эффект. В предельном случае сильного вырождения электронного газа ($T\ll\hbar^2N^{1/2}/mL$), когда функция распределения электронов по квантовым состояниям сводится к «ступенчатой» функции, вычисления приводят к результату

$$E_{\text{ex}}=-8\pi^{1/2}e^2N^{3/2}/3L.$$

Это выражение пропорционально квантовомеханическому обменному интегралу, знаком которого, как известно, определяются симметрии пространственной и спиновой функций, описывающих состояния двух электронов. Расщепление энергетических уровней в гамильтониане взаимодействия для системы двух электронов описывается оператором $\mathscr{H}=2J(\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2)$, где J — обменный интеграл, причем если $J<0$, то волновая функция основного состояния системы двух электронов в магнитном поле должна быть антисимметричной по отношению к перестановке координат; спины электронов в этом состоянии направлены противоположно H. Иными словами, низшее состояние такой системы должно быть спиново-поляризованным.

3. **Волновая функция основного состояния**

Пространственная часть волновой функции ψ, описывающая низшее состояние системы двух электронов (без учета кулоновского взаимодействия), проекция спина системы на направление поля в котором равна -1, имеет вид (вектор-потенциал поля выбран в калибровке $\mathbf{A}=H(y/2,\ -x/2,\ 0)$, движение электронов происходит в плоскости xy)

$$\psi=D\rho^l\exp\{il\varphi\}\cdot\exp\{-(\rho^2+2R^2)/4a^2\},\tag{5}$$

где D — нормировочный коэффициент, a — так называемая магнитная длина: $a=(\hbar c/eH)^{1/2}$, $\mathbf{R}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$ — радиус-вектор центра масс, $\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)/\sqrt{2}=(\rho,\ \varphi)$ — полярные координаты; l — квантовое число, характеризующее проекцию суммарного момента импульса на направление поля относительно системы центра масс. Так как ψ должна быть антисимметричной относительно перестановки электронов, то l — нечетное число. Функцию ψ можно записать так:

$$\psi=Dz^l\exp\left\{-\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{4a^2}\right\},\quad z=x+iy\tag{6}$$

или даже в более общем виде:

$$\psi = Df(z)\exp\left\{-\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{4a^2}\right\}, \tag{7}$$

где $f(z)$ — аналитическая функция z.

Как построить решение с учетом кулоновских взаимодействий? Рассмотрим вновь $\psi(\mathbf{r})$, представив ее в виде

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 \equiv \exp\{2U\} = \exp\{-\rho^2/2a^2\}|f(z)|^2. \tag{8}$$

Функция $\ln|f(z)|$ является реальной частью аналитической функции и удовлетворяет уравнению Лапласа на плоскости xy, причем если $f(z)$ выбрать в виде (6), то

$$\nabla^2 \ln|f(z)| = 2\pi l\delta(\mathbf{r}). \tag{9}$$

Однако можно написать и другое уравнение:

$$\nabla^2 \ln|f(z)| = 2\pi\sum_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j), \tag{10}$$

где $\mathbf{r}_j$ — нули функции $\psi(\mathbf{r})$, т. е. $|\psi(\mathbf{r})|$ может быть периодической функцией на плоскости. Среднее значение гамильтониана системы двух электронов по состоянию (7) имеет вид

$$\langle\mathscr{H}\rangle = \int d\mathbf{R}\, d\mathbf{r}\,(\hbar\omega - \Phi(\mathbf{r},\ \mathbf{R}))\exp\{-R^2/a^2+2U\},$$

где $\Phi(\mathbf{r},\ \mathbf{R})$ — потенциальная энергия взаимодействия электронов между собой и с положительным однородным фоновым зарядом. Минимум этого выражения соответствует минимуму функции U, подчиняющейся уравнениям

$$\nabla^2 U = -a^{-2} + 2\pi l\delta(\mathbf{r}), \tag{11}$$

$$\nabla^2 U = -a^{-2} + 2\pi\sum_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j). \tag{12}$$

Видно, что в (11) U можно интерпретировать как потенциал отрицательного заряда $-l$, локализованного в точке 0, и однородного положительно заряженного фона плотности $1/(2\pi a^2)$, а в (12) U описывает потенциал системы единичных отрицательных зарядов, локализованных в точках $\mathbf{r}_j$, на том же положительном фоне. Задача сводится к вопросу об условиях нейтральности эквивалентного кулоновского газа, создающего потенциал U.

В случае, когда U есть решение уравнения (11), требование нейтральности эквивалентного газа приводит к квантованию расстояния между двумя реальными электронами:

$$\rho^2/2a^2 = l. \tag{13}$$

Этот результат получается, если $|\psi|^2$ рассматривать как парную функцию, которая определяет вероятность того, что два электрона с одинаковыми проекциями спинов находятся на заданном расстоянии ρ. Экстремум $|\psi|^2$ лежит точно в «точке» $\rho^2=2la^2$. Квадрат расстояния между любой парой взаимодействующих электронов оказывается квантованным и одинаковым для любой пары. Так как взаимодействуют между собой в основном соседние электроны, то возникает «жидкая частица», образованная соседними электронами, которая, очевид-

но, в силу квантования расстояний будет «несжимаемой». Нетрудно вычислить «двумерный объем» этой частицы, представив ее в виде равностороннего треугольника: $V_2=(\sqrt{3}/2)\,la^2$.

Если $|\psi|$ — периодическая функция, то U — периодическая функция тоже. Это возможно, если только эквивалентный газ на плоскости нейтрален и мы имеем

$$[1/(2\pi a^2)]\,S=n_j,\quad n_j=1,\ 2,\ \ldots, \tag{14}$$

где n_j — число нулей ψ в ячейке площади S. Это условие приводит к возникновению периодической структуры и дальнего порядка.

Условие (14) есть условие квантования площади элементарной ячейки. Волновую функцию основного состояния для системы из N электронов можно сконструировать в виде произведения (см. также [4]):

$$\psi=\Big\{\prod_{j<k} f(z_j-z_k)\Big\}\exp\Big(-\sum_j |z_j|^2/4\Big). \tag{15}$$

Здесь $z_j=z_j/a$, а так как ψ должна быть антисимметричной относительно перестановки любой пары электронов, то $f(z)$ — нечетная функция z. Из однородности физических условий задачи следует, что, если $f(z)$ удовлетворяет (9), l естественно полагать одинаковым для любой $f(z_j-z_k)$; если же $|\psi(\mathbf{r})|$ — периодическое решение для какой-то пары электронов, то $f(z)$ является периодической функцией, определяемой одинаковыми параметрами и для любой другой пары.

4. **Энергия основного состояния**

Вычислим теперь полную энергию реального электронного газа в магнитном поле на фоне положительного заряда. Ее обычно записывают в виде средней энергии, отнесенной к одному электрону. В слабом поле

$$E=\hbar\omega\nu/2-8e^2/3r_0+E_c=\hbar^2/mr_0^2-8e^2/3r_0+E_c. \tag{16}$$

Здесь $\pi r_0^2=L^2/N$ — площадь на один электрон. Слабым мы называем поле, в котором $a\gg r_0$. Первый член в (16) представляет собой кинетическую, второй — кулоновскую энергию; величина E_c называется корреляционной энергией. Если плотность электронов мала (большие r_0), то в (16) можно пренебречь кинетической энергией по сравнению с потенциальной. В пределе низкой плотности возможно регулярное расположение электронов (соответствующее периодическим $|\psi|$), в результате которого возникает конфигурация типа двумерной кристаллической решетки. В пределе высокой плотности электронный газ (малые r_0) ведет себя как идеальный, так как потенциальная энергия на один электрон мала по сравнению с кинетической. Это соответствует целым значениям фактора заполнения ν. Электроны заполняют несколько уровней Ландау, расположенных ниже уровня Ферми, так что ν принимает целые значения. В слабом поле возможны состояния с большими l.

В сильном поле ситуация изменяется в основном потому, что увеличивается число состояний на фиксированном уровне. Заполнение начинается с низшего уровня, однако если Δ велико, то может оказаться, что для его заполнения потребуется больше, чем N электронов. Поэтому отношение $(N/\Delta)=\nu$ при некоторых N и H может стать мень-

ше единицы. В этом случае ν имеет смысл степени заполнения низшего уровня Ландау при заданных N и H.

Аналог формулы (16) при $a \gg r_0$ получим, используя (5), в виде

$$E = \hbar^2/(2ma^2) - Ce^2 r_0^2/(2a^3) + E_c, \tag{17}$$

где $C = \sqrt{\pi}(2l-1)!!/(2^l l!)$ и $l \geqslant 3$. Вводя $a_0 = \hbar^2/(me^2 a)$ и $\rho_0 = r_0^2/a^2$, представим (17) в виде

$$E = (e^2/2a)(a_0 - C\rho_0) + E_c. \tag{18}$$

В пределе $C\rho_0 \gg a_0$ (при низких плотностях) в принципе возможно образование двумерной кристаллической решетки, параметры которой теперь определяются магнитным полем. В области значений $a_0 \gg C\rho_0$ возможна конденсация электронов в основном состоянии с образованием «жидкой частицы». Можно получить простую интерполяционную формулу, описывающую эффекты обмена при $a_0 \gg C\rho_0$, построив приближенную функцию E_q, первые члены разложения которой будут совпадать с вычисленными в (18). Хорошее согласие достигается, если E_q выбрать в виде

$$E_q = -U_q\left(\sqrt{1 + r_0^2/2\rho^2} - 1\right), \tag{19}$$

где U_q — энергия кулоновского взаимодействия электронов, ρ^2 — квадрат расстояния между ними. Подставляя в (19) ρ^2 из (13), получим

$$E_q = U_q\left(1 - \sqrt{1 + r_0^2/4la^2}\right). \tag{20}$$

Замечая далее, что $(r_0^2/a^2) = 2/\nu$, представим E_q в виде

$$E_q = \left(\sqrt{1 + 1/2\nu l} - 1\right) U_q. \tag{21}$$

Второй член под корнем по смыслу его получения должен быть меньше первого, поэтому $\nu l \geqslant 1$, но $\nu < 1$. Для устойчивости системы важно, чтобы потенциальная энергия ее была как можно меньше, поэтому второй член под корнем должен быть максимальным из возможных, т. е.

$$\nu l = 1, \quad \nu = 1/l. \tag{22}$$

Мы получили соотношение, связывающее фактор заполнения ν с орбитальным квантовым числом. Фактор заполнения изменяется либо с изменением числа частиц N (тогда поле H фиксировано), либо с изменением магнитного поля при фиксированном N. Из формулы (22) следует, что при таких изменениях фактор заполнения может принимать значения $1/l$, где $l = 3, 5, 7, \ldots$ — нечетное число.

Таким образом, эффект так называемой аномальной холловской проводимости (дробные ν), можно сказать, обусловлен конденсацией электронов в (основном) коллективном состоянии, которое представляет собой несжимаемую ферми-жидкость с элементарными возбуждениями, обладающими дробным зарядом e/l (так как ток пропорционален ν). При дальнейшем уменьшении ν возможен фазовый переход с образованием двумерной кристаллической решетки.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ando T., Matsumoto Y., Uemura Y.//J. Phys. Soc. Japan. 1975. **39**. P. 279. [2] Klitzing K., Dorda G., Pepper M.//Phys. Rev. Lett. 1980. **45**. P. 494. [3] Laughlin R.//Phys. Rev. 1981. **B23**. P. 5632. [4] Laughlin R.//Phys. Rev. 1983.

B27. P. 3383; Phys. Rev. Lett. 1983. 50. P. 1395. [5] Халилов В. Р.//Квантовая метрология и фундаментальные константы физики. Л., 1988. С. 55. [6] Халилов В. Р.// //Измерительная техника. 1990. № 2. С. 4.

Поступила в редакцию
07.12.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31. № 4

УДК 530.145

ГЕНЕРАЦИЯ МАССЫ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ И ПЛОТНОСТИ В МОДЕЛИ ГРОССА—НЕВЬЕ

А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, Б. В. Магницкий

(кафедра теоретической физики; НИИЯФ)

Рассматривается влияние конечных значений температур и химического потенциала на генерацию массы в модели Гросса—Невье. Получены соотношения между массой, химическим потенциалом и температурой рассматриваемого газа фермионов.

Как известно, модель Гросса—Невье [1] является двумерным приближением модели Намбу—Иона-Лазинио [2] в квантовой теории поля. Замечательными свойствами модели Гросса—Невье, вытекающими из ее пространственно-временной двумерности, являются перенормируемость, наличие асимптотической свободы и возможность динамической генерации массы фермионов. Отметим, что при конечных температурах и химическом потенциале спонтанно нарушенная симметрия в модели Гросса—Невье может быть восстановлена посредством фазового перехода [3].

В данной работе мы рассмотрим влияние конечных температур и химического потенциала на нарушение киральной симметрии в модели Гросса—Невье при различных соотношениях между этими параметрами.

В качестве исходного лагранжиана рассмотрим, следуя [3], лагранжиан модели Гросса—Невье в двумерном евклидовом пространстве-времени, записанный в следующем виде:

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi+(1/2)\sigma^{2}+ig\bar{\psi}\psi\sigma, \tag{1}$$

где ψ—N-компонентное фермионное поле, σ — вспомогательное нераспространяющееся поле. Как это было предложено в [2], добавим к лагранжиану (1) и вычтем из него массовый член для фермионов. Тогда лагранжиан примет вид

$$\mathscr{L}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi+(1/2)\sigma^{2}+ig\bar{\psi}\psi\sigma+im\bar{\psi}\psi-i(\delta m)\bar{\psi}\psi.$$

Учитывая написанное, для перенормированного обратного пропагатора фермионов получаем выражение [3]

$$i\delta^{ab}Z^{-1}(\gamma^{\mu}p_{\mu}+m+\Sigma_{m})=i\delta^{ab}(\gamma^{\mu}p_{\mu}+m-\delta m)-\Sigma(p),$$

где Σ_m — радиационная поправка к массе фермиона в однопетлевом приближении, а $\Sigma(p)$ — собственная энергия фермиона. Для динамической массы фермиона m, используя условия $\Sigma_m=0$, $\delta m=m$, анало-