

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПЯТОЙ СИЛЫ

Г. А. Сарданашвили, Э. Г. Тимошенко

(кафедра теоретической физики)

Построены лагранжиан и уравнения калибровочной модели пятого фундаментального взаимодействия и получены соответствующие поправки к ньютоновскому потенциалу.

Гипотеза существования пятого фундаментального взаимодействия получила сейчас широкое распространение в связи с неоднозначными результатами лабораторных проверок ньютоновского закона тяготения. Под пятой силой пока понимают всю совокупность гипотетических эффектов, которые могли бы порождать добавки «юкавского» типа к ньютоновскому потенциалу. Нами была предложена модель такого взаимодействия, использующая калибровочные поля группы трансляций [1, 2]. Ее особенность в сравнении с другими аффинными калибровочными теориями состоит в построении отображения деформации пространственно-временного многообразия и рассмотрении материальных полей на таком многообразии.

Пусть AX — главное расслоение аффинных реперов со структурной аффинной группой $A(4, R)$ над пространственно-временным многообразием X^4 . Снабдим его тотальное пространство P координатами $\{x^\mu, u^a, S_\mu^a\}$. Здесь x^μ — координаты в X^4 , u^a — координаты подгруппы трансляций T_4 и S_μ^a — коэффициенты линейной связности, $\{St_a\}$ относительно репера $\{\partial_\mu\}$, где $\{t_a\}$ — фиксированный базис T_4 и S — элемент $GL(4, R)$. Отметим, что $\{x^\mu, u^\mu = S_\mu^a u^a\}$ являются координатами аффинного касательного расслоения $AT(X)$. Пусть в AX задана обобщенная аффинная связность. Ее форма связности ω и соответствующие горизонтальные поля τ^h на P имеют вид

$$\begin{aligned} \omega &= (S^{-1})_b^a (dS_b^e + \Gamma_{\mu\alpha}^e(x) S_\mu^\alpha dx^\mu) I_a^b + (du^a - B_\mu^a(x) dx^\mu) T_a, \\ \tau^h &= \tau^\mu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + B_\mu^a(x) \frac{\partial}{\partial u^a} - \Gamma_{\mu\alpha}^e(x) S_b^\alpha \frac{\partial}{\partial S_b^e} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где I_a^b, T_a — генераторы группы $A(4, R)$, $\Gamma_{\alpha\mu}^e$ — коэффициенты линейной связности, а $B_\mu^e(x) = S_a^e B_\mu^a(x)$ — калибровочные поля группы трансляций. Физическая интерпретация полей B вызывает трудности, поскольку материальные поля являются сечениями линейных, а не аффинных расслоений. Выход указывает пример полей B 3-мерных трансляций в теории дислокаций [3].

Придавая ω смысл векторов смещения, рассмотрим следующее отображение ρ пространства P на тотальное пространство Q подрасслоения линейных реперов LX над X^4 в точках $S_\mu^a u^a = u^e(x)$:

$$(x^\mu, u^a, S_\mu^a) \rightarrow (\gamma^\mu(x; u; s) - S_\mu^e u^e; 1), 0, S_\mu^a) = (x^\mu, 0, S_\mu^a),$$

где $\gamma(x; u; s)$ — геодезическая, проходящая через x в направлении u и определяемая линейной связностью Γ , а $u(x)$ — некоторое сечение расслоения $AT(X)$. Касательное к ρ отображение ρ_* касательного расслоения над P на касательное расслоение над Q преобразует поля (1) на P в поля

$$\tau_Q^h = \tau^\mu(x) (\delta_\mu^v + \mathcal{L}_\mu u^v(x)) \left[\frac{\partial}{\partial x^v} - \Gamma_{\mu\alpha}^e(x) S_b^\alpha \frac{\partial}{\partial S_b^e} \right] \quad (2)$$

на Q , где ковариантная производная поля $u(x)$ имеет вид

$$\mathcal{D}_\mu u^\varepsilon(x) = \partial_\mu u^\varepsilon(x) + \Gamma_{\mu\alpha}^\varepsilon u^\alpha(x) - B_\mu^\varepsilon(x) = \sigma_\mu^\varepsilon(x). \quad (3)$$

Отметим, что обычно в аффинных калибровочных моделях берут отображение $\beta: (x^\mu, u^\alpha, S_\mu^\alpha) \rightarrow (x^\mu, 0, S_\mu^\alpha)$ пространства P на Q в точках $S_\mu^\alpha = u^\varepsilon(x)$. В этих точках $\beta_* = \rho$, но $\beta_* \neq \rho_*$. Сравнивая со случаем $B=0$, $u(x)=0$, отображения ρ и ρ_* можно интерпретировать как деформацию многообразия X^4 . При этом калибровочным преобразованием трансляций поле $u(x)$ всегда можно обратить в нуль. Поэтому физически достоверными являются только его ковариантные производные (3).

Пусть Φ — некоторое тензорное поле на X^4 и \tilde{f}_Φ — соответствующая тензориальная функция на Q . Будем говорить, что Φ задано на деформированном многообразии X^4 , если его дифференцирование определено в виде $(\mathcal{D}\Phi)(\tau) = (df_\Phi)(\tau_Q^h)$, где τ_Q^h — горизонтальный (относительно Γ) лифт (2) поля $\tau = \tau^\mu \partial_\mu$. Это означает, что в теории поля деформацию многообразия можно учесть заменой в операторе внешнего дифференцирования $dx^\mu \mathcal{D}_\mu$ обычных ковариантных производных \mathcal{D}_μ на $\tilde{\mathcal{D}}_\mu = (\delta_\mu^\alpha + \sigma_\mu^\alpha) \mathcal{D}_\alpha = H_\mu^\alpha \mathcal{D}_\alpha$. Выпишем, например, лагранжиан скалярного поля:

$$L_{(\Phi)} = \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} H_\mu^\alpha H_\nu^\beta \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - m^2 \Phi^2]$$

и функционал действия и уравнения движения точечной массы:

$$S = -m_0 \int [d_{\alpha\beta} H_\mu^\alpha H_\nu^\beta u^\mu u^\nu]^{1/2} ds, \quad \frac{du^\mu}{ds} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0, \quad (4)$$

где величины $\tilde{\Gamma}$ имеют вид символов Кристоффеля «метрики» $H_\mu^\alpha H_\nu^\beta g_{\alpha\beta}$, но ds определяется метрикой g . Лагранжианы гравитационного и электромагнитного полей $L_{(g)}$ и $L_{(A)}$ строятся обычным образом, но из модифицированных тензоров кривизны $H_\mu^\alpha H_\nu^\beta R_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ и напряженности $H_\mu^\alpha H_\nu^\beta F_{\alpha\beta}$.

Лагранжиан $L_{(\sigma)}$ самого калибровочного поля трансляций B_μ^ε нельзя построить по обычным правилам янг-милсовской теории, поскольку алгебра Ли аффинной группы не допускает невырожденной инвариантной билинейной формы. Но его можно сконструировать из величин σ_μ^ν и $F_{\mu\nu}^\alpha = \mathcal{D}_{[\nu} \sigma_{\mu]}^\alpha$. При условии положительности компоненты $T_{(\sigma)}^{00}$ метрического тензора энергии-импульса поля σ он имеет вид $(a_1 > 0, a_2 > 0, \mu > 0, \lambda < \mu/4, \sigma_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \sigma_\nu^\alpha)$

$$L_{(\sigma)} = \frac{1}{2} [a_1 F_{\nu\mu}^\alpha F_\alpha^{\nu\mu} + a_2 F_{\mu\nu\sigma} (F^{\mu\nu\sigma} - 2F^{\nu\mu\sigma}) - \mu \sigma_\nu^\mu \sigma_\mu^\nu + \lambda \sigma_\mu^\mu \sigma_\nu^\nu].$$

Источниками поля σ являются: укороченный канонический тензор энергии-импульса материальных полей

$$\frac{\delta L_{(m)}}{\delta \sigma^{\mu\nu}} = (H^{-1})_{\nu\beta} \mathcal{D}_\mu \Phi \frac{\partial L_{(m)}}{\partial \mathcal{D}_\beta \Phi} = (H^{-1})_{\nu\beta} (t_{(m)\mu}^\beta + \delta_\mu^\beta L_{(m)}),$$

укороченный метрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля A и тензор кривизны $-\kappa^{-1} H_\mu^\nu R_{\nu\mu}^{\alpha\beta}$ гравитационного поля. Но вместо последнего, используя уравнения Эйнштейна, можно подставить его выражение через метрические тензоры энергии-импульса материи и самого поля σ . Тогда уравнение для σ принимает вид

$$\frac{\delta L_{(\sigma)}}{\delta \sigma^{\mu\nu}} = \left[-\frac{\delta L_{(m)}}{\delta \sigma^{\mu\nu}} - (H^{-1})_{\nu\beta} \left(T_{(m)\mu}^\beta - \frac{1}{2} \delta_\mu^\beta T_{(m)} \right) \right] - (H^{-1})_{\nu\mu} L_{(A)} + (H^{-1})_{\nu\beta} \left(T_{(\sigma)\mu}^\beta - \frac{1}{2} \delta_\mu^\beta T_{(\sigma)} \right). \quad (5)$$

Ограничимся случаем слабого поля σ , пренебрегая в левой части уравнения (5) взаимодействием σ с гравитационным полем и кручением, а в правой — членами с σ . Получаем

$$\frac{\delta L(\sigma)}{\delta \sigma^{\mu\nu}} = a_1 (\eta_{\mu\nu} \partial^\epsilon F_{\alpha\epsilon}^\alpha - \partial_\mu F_{\alpha\nu}^\alpha) + 2a_2 \partial^\epsilon (F_{\mu\nu\epsilon} + F_{\epsilon\mu\nu} - F_{\nu\mu\epsilon}) - \mu \sigma_{\mu\nu} + \lambda \eta_{\mu\nu} \sigma_\alpha^\alpha.$$

Рассмотрим уравнение (5) в пустоте. С учетом условия

$$\partial^\nu \frac{\delta L(\sigma)}{\delta \sigma^{\mu\nu}} = -\mu \partial^\nu \sigma_{\mu\nu} + \lambda \partial_\mu \sigma = 0 \quad (6)$$

оно разбивается на уравнения для антисимметричной $\omega_{\mu\nu} = (1/2) \sigma_{[\mu\nu]}$ и симметричной $e_{\mu\nu} = (1/2) \sigma_{(\mu\nu)}$ ($e = \sigma_\alpha^\alpha$) частей поля σ :

$$4a_2 \partial^\epsilon (\omega_{\mu\epsilon,\nu} + \omega_{\nu\mu,\epsilon} - \omega_{\nu\epsilon,\mu}) + 2a_1 \omega_{\alpha[\nu,\mu]\alpha} - \mu \omega_{\mu\nu} = 0, \quad (7)$$

$$a_1 (\lambda/\mu - 1) [\eta_{\mu\nu} \square e - e_{,\mu\nu}] + 2a_1 \omega_{\alpha(\nu,\mu)\alpha} - \mu e_{\mu\nu} + \lambda \eta_{\mu\nu} e = 0. \quad (8)$$

В качестве решения уравнения (7) выберем $\omega = 0$, а уравнение (8), используя свертку по индексам μ и ν , запишем в виде

$$\square e + m^2 e = 0, \quad m^2 = \frac{\mu(\mu - 4\lambda)}{3a_1(\mu - \lambda)},$$

$$e_{\mu\nu} = \frac{\mu - \lambda}{3\mu} \left(\eta_{\mu\nu} e - m^{-2} \left(\frac{\mu - 4\lambda}{\mu - \lambda} \right) e_{,\mu\nu} \right).$$

Оно допускает плосковолновые решения.

При наличии источников выражение (6) не равно нулю и в общем случае не является градиентом, поэтому $\mu \neq 0$. Например, в случае точечной массы M источником в правой части уравнения (5) будет $-(1/2) \eta_{\mu\nu} M \delta(r)$ и его стационарное центрально-симметричное решение имеет вид

$$e_{rr} = -(\mu - \lambda)^{-1} \left(3\lambda e_{00} + \frac{1}{2} M \delta(r) \right), \quad e_{\theta\theta} = -e_{00} r^2, \quad e_{\varphi\varphi} = -e_{00} r^2 \sin^2 \theta,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} e_{00} - m^2 e_{00} = -\frac{1}{6} \frac{\mu}{a_1(\mu - \lambda)} M \delta(r), \quad e_{00} = -\frac{\mu M}{6a_1(\mu - \lambda)r} e^{-mr}.$$

Подставляя это решение в уравнение движения пробной частицы (4), получаем поправку к ньютоновскому гравитационному потенциалу:

$$\varphi' = \varphi + e_{00} = -\frac{M}{8\pi r} \left(\kappa - \frac{\mu}{3a_1(\mu - \lambda)} e^{-mr} \right).$$

Отметим, что пятое взаимодействие, дающее вклад в гравитационные эффекты, должно быть таким же универсальным, как и гравитация. Для этого, в частности, его материальным источником должны быть масса или другие составляющие тензора энергии-импульса материи и оно должно описываться массивным полем, хотя и с необычно малой массой. Приведенная выше калибровочная модель удовлетворяет этим условиям. Так, масса m выражается через константы μ и λ в лагранжиане $L(\sigma)$, которые имеют смысл коэффициентов «упругости» пространственно-временного многообразия и могут считаться достаточно малыми, но $m \neq 0$, поскольку $\mu \neq 0$, $\lambda < \mu/4$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sardanashvily G., Gogberashvily M. // Mod. Phys. Lett. 1987. A8. P. 609. [2] Сарданашвили Г. А., Гогберашвили М. Я. // Изв. вузов, Физика. 1988. № 3. С. 71. [3] Кадич А., Еделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М., 1987.

Поступила в редакцию
29.09.89