

УДК 517.9:535.5

О НЕЛИНЕЙНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ ВОЛН. I. УРАВНЕНИЕ УИЗЕМА

П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев

(кафедра математики)

Дан обзор физических задач, приводящих к нелинейным нелокальным уравнениям (ННУ). Рассмотрены следующие вопросы: локальное и глобальное во времени существование решений ННУ, разрушение решений за конечное время, оценка времени существования решений, сглаживание со временем разрывных начальных возмущений, построение обобщенных решений.

§ 1. Введение

Современная математическая физика — это почти исключительно математическая теория нелинейных моделей — уравнений, описывающих разнообразные физические процессы. Наряду с классическими моделями нелинейной гидродинамики, точно решаемыми с помощью метода обратной задачи рассеяния нелинейными уравнениями (см. [1—5]), интенсивно развиваемой теорией нелинейных структур [6], в последнее время значительный интерес исследователей приобрела также теория нелинейных нелокальных уравнений (ННУ), обсуждению которой и посвящен настоящий обзор. Хотя в физической литературе и ранее встречались ННУ (см., напр., [7]), внимание к математическим аспектам этих уравнений впервые (1967 г.) привлек Дж. Уизем [8, 9]. Он предложил следующее весьма общее нелинейное нелокальное уравнение:

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s) u_s(s, t) ds = 0. \quad (1)$$

Это уравнение объединяет в себе характерный для волн на воде нелинейный член uu_x и интегральный член, описывающий полную дисперсию линейной теории.

Дисперсионное соотношение для уравнения Уизема (1) равно фурье-образу ядра $k(x)$:

$$c(p) = \frac{\omega}{p} = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) \exp\{-ipx\} dx \quad (2)$$

и может быть взято произвольным при подходящем выборе $k(x)$. Ввиду этого уравнение (1) содержит обширный класс различных нелинейных уравнений, чрезвычайно интересных для физических приложений. Так, если $c(p) = -ip$, получаем уравнение Бюргерса [10]: $u_t + uu_x - u_{xx} = 0$; если $c(p) = -p^2$, то — уравнение Кортевега—де Фриза [11]: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$; если $c(p) = -|p|$, то приходим к уравнению

Бенджамена—Оно [12, 13]: $u_t + uu_x + \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{ss}(s, t)}{x-s} ds = 0$; если

$\epsilon(p) = -p(\operatorname{cth} 2\delta p - 1/(2\delta p))$, получаем так называемое «промежуточное» уравнение, или уравнение Джозефа [14, 15]:

$$u_t + 2uu_x + \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\delta} \operatorname{cth} \frac{\pi(x-s)}{2\delta} - \frac{1}{2\delta} \operatorname{sgn}(x-s) \right] u_{ss}(s, t) ds = 0. \quad (3)$$

(Интеграл понимается в смысле главного значения.)

В дальнейшем будет показано, что при различных ядрах $k(x)$ нелинейное нелокальное уравнение Уизема (ННУУ) описывает все характерные свойства волновых процессов: заострение волн, опрокидывание волн за конечное время при достаточно большой начальной крутизне, глобальное во времени существование волн, сглаживание с течением времени разрывных начальных возмущений. Кроме того, при разных ядрах $k(x)$ уравнение (1) описывает как консервативные процессы, так и процессы, связанные с диссипацией или накачкой энергии.

Перечислим вначале ряд физических задач, приводящих к ННУ.

В теории поверхностных волн на воде широко известны [16, 17] уравнение Бюргерса $u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0$ и уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ) $u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} = 0$. Оба они содержат нелинейный фактор теории мелкой воды uu_x , и в уравнении Бюргерса присутствует член $-\nu u_{xx}$, описывающий простейшую диффузию (диссипацию), а в уравнении КдФ — слагаемое αu_{xxx} , описывающее простейшую дисперсию. Эти уравнения находят широкое применение в различных разделах физики, им посвящена обширная литература [1—4, 9, 18, 19]. Как отмечалось выше, оба эти уравнения являются частными случаями ННУУ (1): для уравнения Бюргерса ядро $k(x)$ равно $k(x) = -\nu \delta'(x)$, а для КдФ $k(x) = \alpha \delta''(x)$, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Большой интерес для физики представляет и объединение этих двух уравнений, так называемое уравнение Кортевега—де Фриза—Бюргерса:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0. \quad (4)$$

Оно возникает, например, в нелинейной акустике для смеси жидкости с пузырьками газа [20—26].

Уравнение Бенджамена—Оно [12, 13]

$$u_t + 2uu_x + \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{ss}(s, t)}{s-x} ds = 0 \quad (5)$$

описывает внутренние длинные волны в стратифицированной жидкости бесконечной глубины.

«Промежуточное» уравнение, или уравнение Джозефа (3) [14, 27, 28], описывает длинные внутренние волны в стратифицированной жидкости конечной глубины δ . При $\delta \rightarrow 0$ уравнение (3) переходит в уравнение КдФ а при $\delta \rightarrow \infty$ оно приводится к уравнению Бенджамена—Оно (это свойство объясняет название уравнения). К уравнениям (3), (5) применим метод обратной задачи рассеяния, и теория этих уравнений значительно развита (см. [29—35]).

Сам Дж. Уизем, изучая поверхностные волны, предложил уравнение (1) в качестве модельного уравнения, пригодного для описания таких характерных явлений на воде, как эффекты заострения и опро-

кидывания волн. Хорошо известно, что уравнения Бюргерса и КдФ эти эффекты не описывают. Дж. Уизем высказал гипотезу [9, с. 460], что уравнение (1) с ядром $k_g(x)$, отвечающим дисперсионному соотношению точной потенциальной теории волн на воде, имеет решения, опрокидывающиеся за конечное время. В этом случае дисперсионное соотношение имеет вид $c(p) = [(g/p) \tanh kh_0]^{1/2}$; g, h_0 — постоянные; ядро $k_g(x)$ симметрично, экспоненциально убывает на бесконечности и имеет в нуле особенность порядка $|x|^{-1/2}$. Ниже будет показано, что гипотеза Дж. Уизема оказалась справедливой.

С. Лейбовиц [36] вывел уравнение

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_x + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_s(s, t)}{\sqrt{(x-s)^2 + B^2}} ds = 0 \quad (6)$$

для описания аксиально-симметричных длинных волн малой амплитуды в невязкой несжимаемой, радиально бесконечно протяженной вращающейся жидкости. Ядро $k(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + B^2}}$ этого уравнения не имеет особенностей в нуле ($B \neq 0$) (является регулярным в отличие от приведенных выше уравнений).

Ю. Л. Климонтович в работе [7] предложил следующее уравнение магнитной гидродинамики для неизотермической бесстолкновительной плазмы:

$$u_t + \beta u_x + c \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|x-s|) u_s(s, t) ds = 0, \quad (7)$$

u — скорость ионов, K_0 — функция Макдональда нулевого порядка, $c = \text{const}$.

Помимо упомянутого выше уравнения КдФ—Бюргерса в нелинейной акустике для смеси жидкости с пузырьками газа встречаются и другие уравнения, являющиеся частными случаями ННУУ (1), например, предложенное Ю. А. Кобелевым и Л. А. Островским [37] и В. Е. Накоряковым и И. Р. Шрейбером [38] уравнение

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} + \gamma u + \delta \int_0^x \frac{u_s(s, t)}{\sqrt{x-s}} ds = 0,$$

u — акустическое давление в пузырьках газа, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — константы.

Учет совместного действия нелинейности, диссипации и релаксации, обусловленных молекулярной вязкостью и наличием растворенных солей в океане, приводит к следующему ННУ:

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xx} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{\delta} (x-s) \right\} u_s(s, t) ds = 0, \quad (8)$$

полученному О. В. Руденко и С. И. Солуяном [23], u — скорость частиц в волне; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — константы. К этому же уравнению пришел Дж. Энгельбрехт [39, 40], рассматривая математические модели нелинейной эластичности вязкоупругих сред. Он изучал также уравнение (8) в случае, когда ядро $k(x)$ состоит из суммы экспонент.

Другой характер нелинейности представлен в нелинейном нелокальном уравнении Шрёдингера (ННУШ):

$$iu_t + u^2 u^* + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s) u(s, t) ds = 0, \quad (9)$$

описывающем эффекты самофокусировки плоских монохроматических пучков в средах с нелинейным показателем преломления [41—44], и в обобщенном уравнении Колмогорова—Петровского—Пискунова:

$$u_t - u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s) u(s, t) ds = 0, \quad (10)$$

описывающем такие разнообразные физические явления, как процесс горения, распространение доминантных генов и нервных импульсов, эволюцию концентрационных волн [45, 46]. Частным случаем ННУШ является так называемое обобщенное уравнение Ландау—Гинзбурга [47]

$$iu_t + u^2 u^* + u_{xx} + iau = 0. \quad (11)$$

Этим уравнениям посвящена весьма обширная литература [48—54]. Во второй части обзора мы рассмотрим асимптотику решений задачи Коши для уравнений (9)—(11) при больших временах.

Перейдем теперь к нелинейным нелокальным системам уравнений.

Рассмотрим модельную систему уравнений, описывающую поверхностные волны в несжимаемой жидкости:

$$\eta_t + (\nabla, \eta \nabla \varphi) + \mathcal{K}_1(\eta) + \mathcal{K}_2(\varphi) = 0, \quad (12)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \mathcal{K}_3(\eta) + \mathcal{K}_4(\varphi) = 0.$$

Здесь $\eta(x, t)$ — свободная поверхность жидкости; $\varphi(x, t)$ — потенциал скорости, $x \in R_2$, $t \geq 0$; $\mathcal{K}_j$ — линейные операторы, определяемые формулой

$$\mathcal{K}_j(\psi) = \iint_{-\infty}^{\infty} k_j(x-s) \psi(s) ds. \quad (13)$$

Преобразование Фурье ядер $k_j(x)$ задает дисперсионное соотношение для системы (12). Различный выбор ядер $k_j(x)$ отвечает различным процессам распространения волн: консервативным, диссипативным либо связанным с накачкой энергии, ввиду чего система уравнений (12) является весьма общей.

Так, в частном случае, когда $\mathcal{K}_3(\eta) = \eta$, а остальные $\mathcal{K}_j = 0$, система (12) переходит в систему уравнений мелкой воды [9, 16, 17, 55]:

$$\eta_t + (\nabla, \eta \nabla \varphi) = 0, \quad (14)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \eta = 0,$$

которая содержит нелинейные члены, но не учитывает дисперсию.

Если ограничиться только простейшим дисперсионным членом, то (12) приводится к известной системе уравнений Буссинеска [56]:

$$\eta_t + (\nabla, \eta \nabla \varphi) + \beta \nabla^4 \varphi = 0, \quad (15)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \eta = 0, \quad \beta = \text{const.}$$

Система (12) содержит также полученные недавно С. Ю. Доброхотовым [57] уравнения, которые в первом приближении по нелинейности имеют вид

$$\eta_t + (\nabla, \eta \nabla \varphi) + B(\varphi) = 0, \quad (16)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \eta = 0.$$

Преобразование Фурье (символ) оператора B равно $B(p) = |p| \text{th}|p|$ и отвечает точной потенциальной теории.

Важный частный случай системы уравнений (12) связан с выбором $\mathcal{K}_3 = 0$. Тогда система (12) принимает вид

$$\eta_t + (\nabla, \eta \nabla \varphi) + \mathcal{K}_1(\eta) + \mathcal{K}_2(\varphi) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mathcal{K}_4(\varphi) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (18) может быть решено независимо от (17), а полученное решение при подстановке в уравнение (17) превращает его в линейное уравнение относительно η . В свою очередь, уравнение (18) в одномерном по пространственным переменным случае сводится к уравнению Уизема и, таким образом, содержит многие важные одномерные уравнения: КдФ, Бюргерса, Бенджамена—Оно и др.

Итак, система уравнений поверхностных волн на воде (12) содержит многие важные для физики уравнения и системы, как одномерные, так и многомерные.

Более общей, чем (12), является следующая система уравнений:

$$\eta_t + (\nabla, \eta u) + \mathcal{K}_1(\eta) + \mathcal{K}_2(u) = 0, \quad (19)$$

$$u_t + (u, \nabla) u + \mathcal{K}_3(\eta) + \mathcal{K}_4(u) = 0,$$

где $\eta = \eta(x, t)$ — свободная поверхность, а $u = u(x, t)$ — двумерный вектор скорости. Эта система уравнений столь же интересна для физики, как и система (12). Ее частными случаями являются системы (12)—(18). Известные уравнения Хохлова—Заболотской [58] и Кадомцева—Петвиашвили [59] также следуют при подходящем выборе оператора $\mathcal{K}_4$ из системы (19), если η и одна из компонент скорости u равны нулю. Например, уравнение Кадомцева—Петвиашвили $(u_t + u_{xxx} - 6uu_x)_x \pm u_{yy} = 0$ получается из системы (19), в которой $\eta \equiv 0$, $u^{(2)} \equiv 0$, а символ оператора $\mathcal{K}_4$ равен

$$\hat{K}_4(p) = \begin{pmatrix} (ip_1)^3 + c_0 \frac{(ip_2)^2}{ip_1}, & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предложенная Д. Каупом [60] и Л. Броером [61] одномерная по x система уравнений

$$\begin{aligned}\eta_t &= (\alpha\eta + \alpha u_{xx} - \beta\eta_x)_x, \\ u_t &= \left(\frac{1}{2}u^2 + \eta + \beta u_x \right)_x\end{aligned}\quad (20)$$

также является частным случаем системы (19). Системы (12) и (19) связаны естественным образом: дифференцируя по x_1 и x_2 второе уравнение в (12) и полагая $u = \nabla\varphi$ и $\mathcal{H}_2(\varphi) = \mathcal{H}_2(\nabla\varphi)$, приходим к системе (19).

Дальнейшее содержание обзора таково: в § 2 рассмотрены простейшие свойства одномерного ННУУ, в § 3 изучается задача Коши для ННУУ, § 4 посвящен периодической задаче для ННУУ, в § 5 вводятся обобщенные решения для ННУУ. Вторая часть обзора посвящена изучению системы уравнений поверхностных волн (12) и (19) и асимптотике решений при $t \rightarrow \infty$ нелинейных нелокальных уравнений Уизема, Шрёдингера, Колмогорова—Петровского—Пискунова, системы поверхностных волн и уравнения КдФ—Бюргера.

§ 2. Простейшие свойства решений ННУУ

1°. Законы сохранения

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение уравнения (1) — достаточно быстро убывает на бесконечности. Заметим прежде всего, что уравнение Уизема (1) инвариантно относительно галилеевых преобразований: $t' = t$, $x' = x + ct$, $u'(x', t') = u(x, t) + c$. Если ядро в уравнении (1) симметрично ($k(x) = k(-x)$) и вместе с первой производной абсолютно интегрируемо на всей прямой, то имеют место следующие законы сохранения (см. [62]):

$$\begin{aligned}I_1(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = \text{const}, \quad I_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx = \text{const}, \\ I_3(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u^3}{3} + u\tilde{\mathcal{H}}(u) \right] dx = \text{const},\end{aligned}\quad (21)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)u(s, t)ds$. Интеграл $I_3(u)$ имеет характер энергии.

Постоянство его во времени позволяет записать уравнение Уизема в гамильтоновой форме:

$$u_t = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathcal{H}(u)}{\delta u},$$

гамильтониан $\mathcal{H}(u)$ равен $(1/2)I_3(u)$.

Кроме полиномиальных интегралов движения (21) существует еще ряд сохраняющихся во времени величин, содержащих явно координату x или время t :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[xu - t \frac{u^2}{2} - c(0)tu \right] dx &= \text{const}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x [\bar{c}(0)u - \tilde{\mathcal{H}}(u)] dx &= \text{const}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{H}(u) dx = -c(0)I_1, \\ \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \tilde{\mathcal{H}}(u) dx &= -c(0)(I_2 + c(0)I_1), \end{aligned} \quad (22)$$

где $c(0) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) dx$. Из первого соотношения (22) следует, что центр тяжести волны, описываемой ННУУ, движется с постоянной скоростью, равной $c(0) + I_2/I_1$, поскольку

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} xu dx = I_2 + c(0)I_1.$$

2°. Задача о заострении волн

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Уизема:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)u_s(s, t) ds &= 0, \\ u|_{t=0} &= \bar{u}(x). \end{aligned} \quad (23)$$

В § 3 и 4 будет показано, что если ядро $k(x)$ обладает большой диссипацией, то разрывное начальное возмущение сглаживается и остается в дальнейшем бесконечно-гладким. Так происходит, например, для уравнения Бюргерса или уравнения КдФ—Бюргерса. Здесь мы обрисуем обратную ситуацию: кусочно-гладкое (заостренное) в начальный момент возмущение остается кусочно-гладким во все время существования решения задачи Коши. Под решением задачи (23) будем понимать непрерывную в полосе $\Pi = [0, T] \otimes R_1$ функцию $u(x, t)$, имеющую кусочно-непрерывные в полосе Π первые и вторые производные по x , непрерывно примыкающую при $t \rightarrow 0$ к начальному условию $\bar{u}(x)$ и удовлетворяющую уравнению Уизема в обобщенном смысле, т. е. для любой финитной в полосе функции $\psi(x, t) \in C_0^\infty(\Pi)$ справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} \left[u \left(\psi_t + \frac{1}{2} \psi_x u \right) + \psi_x \tilde{\mathcal{H}} u \right] dx dt &= 0, \\ \tilde{\mathcal{H}} u &= \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)u(s, t) ds. \end{aligned} \quad (24)$$

Такое решение вне линий разрыва первых производных является классическим в том смысле, что уравнение Уизема выполняется поточечно. Сами линии разрыва $x(t)$ удовлетворяют условию Гюгонио $\dot{x}(t) = u(x, t)$.

Теорема 1. Пусть ядро $k(x)$ уравнения Уизема абсолютно интегрируемо на R_1 ($k(x) \in L_1(R_1)$) и непрерывно, а начальное возмущение $\tilde{y}(x)$ кусочно-гладко, причем $\tilde{y}'(+0) - \tilde{y}'(-0) \neq 0$. Тогда обобщенное решение задачи (23) будет оставаться кусочно-гладким в течение всего времени существования решения, причем разрыв первых производных лежит на линии $\dot{x}(t) = u(x, t)$, $x(0) = 0$.

§ 3. Задача Коши для уравнения Уизема

В предыдущем параграфе в предположении существования решения задачи Коши (23) было рассмотрено характерное для волн явление заострения. Здесь мы приведем результаты, касающиеся вопросов существования и единственности решения задачи Коши, дадим положительный ответ на вопрос Уизема об опрокидывании волны, описываемой уравнением Уизема с ядром $k_g(x)$, сформулируем условия, при которых решение задачи Коши (23) существует в целом по времени, и рассмотрим вопрос о сглаживании разрывного начального возмущения (см. [63—66]).

В этих задачах ядро $k(x)$ уравнения Уизема может иметь произвольную особенность в нуле, в частности может быть не интегрируемым, и запись нелокального члена в виде интеграла неприменима. Будем трактовать в дальнейшем линейный нелокальный оператор $\mathcal{K}(u)$ как псевдодифференциальный:

$$\mathcal{K}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ipx\} ip \hat{K}(p) \hat{\psi}(p) dp \quad (25)$$

для любой функции $\psi \in C_0^\infty(R_1)$ или $\psi \in H^\infty(R_1)$ ($\psi \in C_0^\infty(R_1)$ означает, что функция ψ бесконечно дифференцируема и имеет компактный носитель; $\psi \in H^\infty(R_1)$ означает, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(p)|^2 (1 + |p|^2)^s dp < \infty$ при

любом вещественном s), $\hat{\psi}(p)$ — преобразование Фурье функции $\psi(x)$; ради сокращения записи во всех формулах прямого и обратного преобразования Фурье число $1/\pi$ будет опускаться. Функция $K(p)$ называется символом оператора $\mathcal{K}(u)$ и полностью его характеризует.

Порядком оператора $\mathcal{K}(u)$ называется число α_0 , равное точной нижней грани чисел α , для которых

$$|p\hat{K}(p)| \leq c(1 + |p|)^\alpha, \quad c \geq 0, \alpha \geq 0, p \in R_1. \quad (26)$$

Если $\alpha_0 < 1$, то ядро $k(x)$ абсолютно интегрируемо и его особенность в нуле имеет порядок α_0 .

Мнимая часть $R^1(p) = -\text{Im } K(p)p$ называется диссипативной, а действительная часть $R^2(p) = \text{Re } K(p)p$ — консервативной составляющей символа $ip\hat{K}(p)$ оператора $\mathcal{K}(u)$.

1°. Опрокидывание волн

В работе [9] Дж. Уизем поставил вопрос: могут ли опрокидываться волны, описываемые уравнением Уизема с ядром $k_g(x)$. Ядро $k_g(x)$,

как отмечено выше, обладает следующими свойствами: оно симметрично ($k_g(x) = k_g(-x)$), имеет в нуле особенность вида $c|x|^{-1/2}$ и экспоненциально стремится к нулю на бесконечности.

Опрокидывание волны означает обращение в бесконечность за конечное время первой производной решения задачи Коши (23): $\max_x |u(x, t)| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T_0 < \infty$, T_0 называется временем опрокидывания.

Первые результаты по опрокидыванию волн, описываемых уравнением Уизема, были получены Р. Селиджером [67] и С. А. Табовым [68]. В них было показано, что в случае гладкого ядра $k(x)$ нелинейный член в уравнении Уизема превалирует над интегральным и волна опрокидывается за конечное время, если крутизна начального возмущения достаточно велика и волна в начальный момент асимметрична (последнее условие, как мы увидим в дальнейшем, является излишним). Однако в большинстве физических приложений ядро $k(x)$ является сингулярным. Полный положительный ответ на вопрос Уизема содержится в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть: 1) ядро $k(x)$ в уравнении Уизема удовлетворяет следующим условиям:

$$k(x) \in C^1(R_1 \setminus 0) \cap L_1(R_1), \quad |k(x)| \leq c|x|^{-\alpha},$$

$$|k'(x)| \leq c|x|^{-1-\alpha}, \quad x \in [-a, a] \setminus 0,$$

$$\int_{|x| \geq a} |k'(x)| dx \leq c,$$

$\alpha = 3/5 - \gamma$, $\gamma \in (0, 1/10]$, $c > 0$, $a \in (0, 1]$;

2) интегральный оператор $\mathcal{K}(u)$ диссипативен, т. е. для фурье-образа ядра $\hat{K}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ipx\} k(x) dx$ при $|p| \geq p_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\hat{K}^1(p) \equiv \operatorname{Re}(ip\hat{K}(p)) \geq 0;$$

3) начальное условие $\bar{u}(x) \in H^\infty(R_1)$ имеет достаточно большую крутизну $m_0 = [\min_{x \in R_1} \bar{u}'(x)]$:

$$m_0^2 > \frac{7c}{\gamma a} (u_1 + \sqrt{J}) + \left(\frac{2b}{\gamma}\right)^2,$$

$$u_1 = \max_{x \in R_1} |\bar{u}'(x)|, \quad b = \sup_{|p| \leq p_0} (0, -K^1(p)),$$

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^3 \bar{u}(x)}{dx^3}\right)^2 dx.$$

Тогда существует решение $u(x, t) \in C^\infty([0, T_0]; H^\infty(R_1))$, опрокидывающееся к моменту времени T_0 . Для T_0 справедлива двусторонняя оценка:

$$m_0^{-1}(1 + \gamma)^{-1} \leq T_0 \leq m_0^{-1}(1 - \gamma)^{-2}.$$

Порядок особенности ядра может быть увеличен до $2/3$ за счет некоторого сужения класса начальных возмущений [69].

Теорема 2 содержит важный для физики частный случай симметричных ядер $k(x)=k(-x)$, поскольку при этом неконсервативная составляющая символа $\hat{K}(p)$ равна нулю: $\hat{K}^1(p)=0$, $p \in R_1$.

2°. Существование решения для всех моментов времени

Известно, что уравнение Уизема имеет решения вида уединенных волн (см. [9, 69, 70]). Таким образом, при определенных условиях решение существует в целом по времени. Целью этого пункта является нахождение таких общих условий. Приведем теорему 3 о существовании в целом решения задачи Коши для уравнения Уизема с диссипативным оператором $\mathcal{H}$ любого неотрицательного порядка $\alpha_0 \geq 0$ в случае, когда крутизна начального возмущения достаточно мала.

Теорема 3. Пусть: 1) оператор $\mathcal{H}$ строго диссипативен: $\hat{K}^1(p) \geq 0$ при $|p| \leq p_0$, $\hat{K}^1(p) \geq \varepsilon > 0$ при $|p| \geq p_0 > 0$, 2) $\bar{u}(x) \in H^\infty(R_1)$, 3) $\|\bar{u}\|_{H^1(R_1)} \leq c$, где $c=c(\varepsilon, h) > 0$ достаточно мало. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ задачи (23), принадлежащее классу $C^\infty([0, \infty); H^\infty(R_1))$.

Характерным в этой теореме является условие малости крутизны волны в начальный момент времени. Сопоставляя теоремы 2 и 3, заключаем, что требование большой крутизны начального возмущения является не только достаточным, но и необходимым условием для опрокидывания волны.

Теорема 3 показывает, что уже минимальная диссипация обеспечивает существование решения задачи Коши в целом. Действительно, в консервативном случае, когда $k(x)=k(-x)$, а значит, $\hat{K}^1(p)=0$, имеет место опрокидывание волны (теорема 2), а если $\hat{K}^1(p) \geq \varepsilon > 0$, ε — любое, решение уже существует в целом. При более значительной диссипации, как мы увидим в следующем пункте, происходит даже сглаживание разрывного начального возмущения.

3°. Сглаживание разрывных начальных возмущений

Теорема 4. Пусть: 1) оператор $\mathcal{H}$ в уравнении Уизема сильно диссипативен т. е.

$$\hat{K}^1(p) \geq \varepsilon |p|^\alpha \text{ при } |p| \geq p_0 \geq 1, \quad (27)$$

где $\varepsilon > 0$, $\alpha > 1$; 2) начальное возмущение $\bar{u}(x) \in H^0(R_1)$, $\rho \geq 0$, $\rho > 3/2 - \alpha$. Тогда для некоторого $T > 0$ существует единственное решение задачи Коши (23), принадлежащее $C^\infty((0, T]; H^\infty(R_1)) \cap C^0([0, T]; H^0(R_1))$.

Существование сглаженного решения для всех моментов времени $t > 0$ гарантирует следующая

Теорема 5. Пусть: 1) выполнено условие (27) с $\alpha > 3/2$, 2) $\bar{u}(x) \in L_2(R_1)$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (23), принадлежащее $C^\infty((0, \infty); H^\infty(R_1)) \cap C^0([0, \infty); L_2(R_1))$.

Таким образом, разрывное в начальный момент возмущение в любой момент времени $t > 0$ становится и остается бесконечно гладким для всех последующих моментов времени. Тем самым в классе сильно диссипативных операторов $\mathcal{H}$, порядок которых превосходит $3/2$, эффект опрокидывания волн невозможен.

Примеры. Для уравнения Бюргерса $u_t + uu_x - au_{xx} = 0$ и уравнения КдФ—Бюргерса $u_t + uu_x - au_{xx} + \beta u_{xxx} = 0$ символы оператора $\mathcal{H}(u)$ равны соответственно $\hat{K}(p) = -iap$ и $\hat{K}(p) = -iap + \beta p^2$, так что условие

сильной диссипации (27) выполнено при $\alpha=2$ и теоремы 4 и 5 справедливы для этих уравнений. Для уравнения Курамото—Сивашинского [71]

$$u_t + uu_x + au_{xx} + \beta u_{xxxx} = 0$$

символ оператора $\mathcal{K}(u)$ равен $K(p) = iap - i\beta p^3$ и теоремы 3 и 4 справедливы также и для этого уравнения, если $\beta > 0$.

§ 4. Периодическая задача для уравнения Уизема

1°. Постановка периодической задачи

В случае, когда среда обладает периодической структурой, естественно рассматривать уравнение Уизема с интегралом, взятым по периоду. В этом параграфе мы изучим свойства решений задачи Коши для периодического по пространственной переменной уравнения Уизема:

$$u_t + uu_x + \int_{-L}^L k(x-s) u_s(s, t) ds = 0, \quad (28)$$

$$u|_{t=0} = \bar{u}(x).$$

Здесь $k(x)$ — $2L$ -периодическая действительная функция, $\bar{u}(x)$ — $2L$ -периодическое начальное возмущение. От представления нелокального оператора $\mathcal{K}(u)$ в виде свертки с ядром $k(x)$ перейдем к более общему определению $\mathcal{K}(u)$ как псевдодифференциального:

$$K(u) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} i p \hat{K}_p \hat{u}_p \exp \left\{ i p x \frac{\pi}{L} \right\}, \quad (29)$$

где $u(x)$ — любая функция из $C_L^\infty(R_1) \equiv \{u(x) \in C^\infty(R_1) : u(x) = u(x+2L)\}$, $\hat{u}_p$ — ее коэффициенты Фурье, K_p — символ оператора $\mathcal{K}$. В дальнейшем, ради сокращения записи, полагаем $L=\pi$. Как и в § 3, вводим понятия порядка оператора $\mathcal{K}$, консервативной $K_p^2 = \text{Re } K_p p$ и диссипативной $K_p^1 = -\text{Im } K_p p$ составляющих символа K_p оператора $\mathcal{K}$.

Результаты, установленные для периодической задачи (28), во многом аналогичны результатам § 3, они получены в работах [72, 73].

2°. Периодическая задача для уравнения Уизема с малым нелокальным взаимодействием

Если нелокальное взаимодействие мало, естественно рассматривать уравнение Уизема с малым параметром μ перед интегральным членом:

$$u_t + uu_x + \mu \int_{-\pi}^{\pi} k(x-s) u_s(s, t) ds = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x). \quad (30)$$

Целью этого пункта является отыскание асимптотики решения задачи (30) при $\mu \rightarrow 0$.

Для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эта задача изучается давно: первой здесь была известная работа Хопфа [18], вызвавшая большой поток исследований (см. обзор [74]). В последние годы интерес к этим задачам возрос в связи с обнаруженными многочисленными точно решаемыми с помощью обратной задачи рассеяния нелинейными уравнениями и изучением уравнений, являющихся малым возмущением точно решаемых (см. [25, 26, 75, 76]).

Для ННУ эти вопросы изучаются в работах [72, 77, 78]. Одним из результатов является

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда: 1) для любого $\mu \in [0, 1]$ существует единственное 2π -периодическое решение $u_\mu(x, t)$ задачи (30), $u_\mu(x, t) \in C^\infty([0, T_\mu]; C_\pi^\infty(R_1))$, T_μ — время опрокидывания; 2) для $u_\mu(x, t)$ имеет место асимптотическое разложение

$$u_\mu(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k u_k(x, t),$$
 причем для остаточного члена δ_n выполняется оценка $\max_{t \in [0, T_0 - \beta]} \left\| \frac{\partial^k \delta_n}{\partial t^k} \right\|_{(l)} \leq c_0 \mu^{n+1}$, $\beta > 0$ — любое, $k, l \geq 0$ — любые целые, $\|\cdot\|_{(l)}$ — норма пространства $C^l([- \pi, \pi])$, $c_0 = c_0(l, k, n, \beta)$.

§ 5. Обобщенные решения для ННУУ

С одним из возможных обобщенных решений уравнения Уизема мы встречались при рассмотрении задачи о заострении волн. Здесь мы познакомимся с другими определениями обобщенных решений и сформулируем теоремы о их существовании для всех моментов времени. Важность обобщенных решений общеизвестна; в ряде задач именно они адекватны соответствующей постановке, в других случаях, как, например, в задаче об опрокидывании волн, начиная с некоторого момента классического решения просто не существует и дальнейшая эволюция процесса может быть описана только с помощью обобщенных решений.

Определение 1. Рассмотрим задачу Коши

$$u_t + uu_x + \mathcal{K}(u) = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad x \in R_1, \quad (31)$$

где $\mathcal{K}(u)$ — псевдодифференциальный оператор, определенный в (25), для которого выполнено условие диссипации (27) с $\alpha > 0$. Назовем $u(x, t)$ обобщенным решением задачи (31), если для всех $T > 0$

$$u(x, t) \in L_\infty([0, T]; L_2(R_1)) \cap L_2([0, T]; H^{3/2}(R_1)),$$

$$u_t(x, t) \in L_2([0, T]; H^{-\sigma}(R_1)), \quad \sigma = 3/2 + \alpha_0,$$

и почти при всех $t \in [0, T]$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$(u_t, \varphi) + (u, \mathcal{K}^*(\varphi)) - \frac{1}{2}(u, u\varphi_x) = 0 \quad (32)$$

для любой функции $\varphi \in H^\sigma(R_1)$ и начальному условию

$$u|_{t=0} = \bar{u}(x), \quad x \in R_1, \quad \bar{u}(x) \in L_2(R_1). \quad (33)$$

Круглые скобки в (32) означают скалярное произведение в $L_2(R_1)$, $\mathcal{K}^*$ — оператор с сопряженным символом, α_0 — порядок оператора $\mathcal{K}(u)$, $\alpha > 0$ — число из условия (27).

Теорема 7. Пусть неконсервативная составляющая $R^1(p)$ символа $K(p)$ удовлетворяет условиям (27) с $\alpha > 0$, а начальное возмущение $\bar{u}(x) \in L_2(R_1)$. Тогда существует обобщенное решение $u(x, t)$ задачи Коши (31).

В ряде предыдущих теорем условия налагались на неконсервативную часть $R^1(p)$, тогда как консервативное слагаемое $R^2(p)$ могло быть произвольным. При невыполнении требования диссипации не приходится рассчитывать на эффект сглаживания, однако при $R^1(p) = 0$ имеются два дополнительных закона сохранения $I_1(t)$ и $I_2(t)$ (см. § 2), которые позволяют доказать существование решения задачи Коши (31) из класса $L_\infty([0, T]; H^{(\alpha-1)/2}(R_1))$.

Пусть $R^1(p) = 0$, а консервативная часть $R^2(p)$ символа $K(p)$ знакоопределена и растёт при больших p , т. е.

$$R^2(p) \geq \varepsilon |p|^\alpha \text{ либо } R^2(p) \leq -\varepsilon |p|^\alpha, |p| \geq p_0 > 0,$$

$$\alpha > 3/2, \varepsilon > 0.$$

(34)

Определение 2. Функция $u(x, t)$ называется обобщенным решением задачи Коши (31) для уравнения Уизема с консервативным оператором $\mathcal{H}(u)$ (т. е. $R^1(p) = 0$), если для всех $T > 0$

$$u(x, t) \in L_\infty([0, T]; H^{(\alpha-1)/2}(R_1)),$$

$$u_t(x, t) \in L_2([0, T]; H^{-\sigma}(R_1)), \quad \sigma = 3/2 + \alpha_0,$$

и почти всюду выполнены равенства (32) и (33).

Теорема 8. Пусть $R^1(p) = 0$ и для $R^2(p)$ выполнено условие (34), а начальное возмущение $\bar{u}(x) \in H^{(\alpha-1)/2}(R_1)$. Тогда существует обобщенное решение $u(x, t)$ задачи Коши (31).

Из этой теоремы вытекает

Следствие. Пусть $R^1(p) = 0$ и для $R^2(p)$ выполнены условия (34) с $\alpha > 4$, а $\bar{u}(x) \in H^\infty(R_1)$. Тогда существует единственное классическое решение $u(x, t)$ задачи Коши (31), принадлежащее классу $C^\infty([0, \infty); H^\infty(R_1))$.

Таким образом, для консервативных операторов никакое разрушение волн невозможно, если порядок оператора больше 4.

Перечисленные результаты получены в работе [66] применением методов Ж. Л. Лионса [79].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., 1980.
- [2] Абловитц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М., 1987.
- [3] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., 1969.
- [4] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования эволюционных уравнений. М., 1985.
- [5] Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М., 1986.
- [6] Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание/Под ред. А. А. Самарского. М., 1988.
- [7] Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М., 1964.
- [8] Уизем Дж.//Нелинейная теория распространения волн. М., 1970.
- [9] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
- [10] Burgers J. M.//Adv. Appl. Mech. 1948. 1. P. 171.
- [11] Korteweg D. J., de Vries G.//Phil. Mag. 1895. 5, N 39. P. 422.
- [12] Benjamin T. B.//J. Fluid Mech. 1967. 29, N 3. P. 559.
- [13] Ono H.//J. Phys. Soc. Japan. 1975. 39, N 4. P. 1082.
- [14] Joseph R. J.//J. Phys. A. 1977. 10. P. L225.
- [15] Satsuma J., Ablowitz M. J., Kodama Y.//Phys. Lett. 1979. 73A, N 4. P. 283.
- [16] Стокер Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., 1959.
- [17] Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977.
- [18] Hopf E.//Comm. Pure and Appl. Math. 1950. 3, N 3. P. 201.
- [19] Cole I. D.//

//Quart. Appl. Math. 1951. 9. P. 226. [20] Гасенко В. Г. //Исследования по гидродинамике и теплообмену. Новосибирск, 1976. [21] Crighton D. G. //Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. 11. P. 11. [22] Nariboli G. A., Sedov A. //J. Math. Anal. Appl. 1970. 32, N 3. P. 661. [23] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975. [24] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973. [25] Авиллов В. В., Кричевер И. М., Новиков С. П. //ДАН СССР. 1987. 295, № 2. С. 345. [26] Авиллов В. В., Новиков С. П. //ДАН СССР. 1987. 294, № 2. С. 325. [27] Chen H. H., Lee Y. C. //Phys. Rev. Lett. 1979. 43, N 4. P. 264. [28] Kubota T., Ko D. R., Dobbs D. //AIAA Journal. 1978. 12. P. 157. [29] Kodama Y., Satsuma J., Ablowitz M. J. //Phys. Rev. Lett. 1981. 46, N 11. P. 687. [30] Kodama Y., Ablowitz M. J., Satsuma J. //J. Math. Phys. 1982. 23, N 4. P. 564. [31] Ablowitz M. J., Fokas A. S., Anderson R. L. //Phys. Lett. 1983. 93A, N 8. P. 375. [32] Bock T. L., Kruskal M. D. //Phys. Lett. 1979. 74A, N 3. P. 173. [33] Fokas A. S., Fuchssteiner B. //Phys. Lett. 1981. 86A, N 6. P. 341. [34] Fokas A. F., Ablowitz M. J. //Studies Appl. Math. 1983. 68. P. 1. [35] Case K. M. //Ann. Nucl. Energy. 1980. 7. P. 273. [36] Leibovich S. //J. Fluid Mech. 1970. 42. P. 802. [37] Кобелев Ю. А., Островский Л. А. //Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький, 1980. [38] Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. //ТВТ. 1979. 17, № 4. С. 798. [39] Jeffrey A., Engelbrecht J. //Wave Motion. 1980. 2, N 3. P. 255. [40] Гольдберг В. Н., Заридына И. Г., Федосеева Т. Н., Фридман В. Е. //Акуст. журн. 1981. 27, № 1. С. 88. [41] Захаров В. Е., Шабат А. Б. //ЖЭТФ. 1971. 61, № 1. С. 118. [42] Kelley P. L. //Phys. Rev. Lett. 1965. 15. P. 1005. [43] Kaup D. J., Hansen D. J. //Physica. 1986. D18. P. 77. [44] Goldman M. V. //Physica. 1986. 18D. P. 67. [45] Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. //УФН. 1979. 128. С. 625. [46] Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. //Бюл. МГУ, Математика и механика. 1937. 1. С. 1. [47] Dynamical Problem in Soliton Systems. Berlin, Springer Verlag, 1985. P. 34 & 46. [48] Pelletier G., Goldman M., Moon H. T., Merryfield W. //Physica. 1986. 18. P. 154. [49] Маломед Б. А. //ТМФ. 1982. 51, № 1. С. 34. [50] Вольперт А. И. //Петровский И. Г. Избранные труды. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. М., 1987. [51] Gramson M. //Mem. Amer. Math. Soc. 1983. N 285. P. 1. [52] Tsutsumi M. //SIAM J. Math. Anal. 1984. 15, N 2. P. 357. [53] Spenler D., Marques G. C. //J. Math. Phys. 1989. 30, N 2. P. 464. [54] Glassey R. T. //J. Math. Phys. 1977. 18, N 9. P. 1794. [55] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6, Гидродинамика. М., 1988. [56] Boussinesq J. //Compt. Rend. Acad. Sci. 1871. 72. P. 755. [57] Доброхотов С. Ю. //ДАН СССР. 1987. 292, № 1. С. 63. [58] Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. //Акуст. журн. 1969. 15, № 1. С. 40. [59] Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. //ДАН СССР. 1970. 192. С. 753. [60] Кауп Д. J. //Progr. Theor. Phys. 1975. 54, N 2. P. 396. [61] Broer L. J. //Appl. Scient Res. 1975. 31. P. 377. [62] Габов С. А. //ДАН СССР. 1978. 242, № 5. С. 993. [63] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //ДАН СССР. 1986. 288, № 1. С. 90. [64] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //Дифф. уравнения. 1985. 21, № 10. С. 1775. [65] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //Тез. докл. Всесоюз. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». Ашхабад, 1986. С. 114. [66] Наумкин П. И. //ЖВМ и МФ. 1987. № 4. С. 633. [67] Seliger R. L. //Proc. Roy. Soc. 1968. A303. P. 493. [68] Габов С. А. //ДАН СССР. 1979. 246, № 6. С. 1292. [69] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //ДАН СССР. 1983. 273, № 4. С. 804. [70] Зайцев А. А. //ДАН СССР. 1986. 286, № 4. С. 1364. [71] Sakovich S. J. //J. Phys. A: Math. Gen. 1988. 21. P. L1123. [72] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //ДАН СССР. 1988. 299, № 5. С. 1063. [73] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //Матем. сб. 1989. № 7. С. 946. [74] Кружков С. Н., Петросян Н. С. //УМН. 1987. 42, № 5. С. 3. [75] Маслов В. П., Омелянов Г. А. //Дифф. уравнения. 1985. 21, № 10. С. 1766. [76] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М., 1988. [77] Наумкин П. И., Шишмарев И. А. //Дифф. уравнения. 1985. 21, № 10. С. 1875. [78] Петрова М. А., Шишмарев И. А. //Тез. докл. Всесоюз. науч. совещ. «Методы малого параметра». Нальчик, 1987. С. 118. [79] Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.

Поступила в редакцию
10.11.89