ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

О ДЕФОРМАЦИИ ДЕБАЕВСКОЙ СФЕРЫ ЭКРАНИРОВАНИЯ ЗАРЯДА

А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, Б. В. Магницкий, А. В. Татаринцев

(кафедра теоретической физики)

Изучаются полевые и температурные поправки к поляризационному оператору фотона во внешнем магнитном поле при различных предельных значениях для импульса фотона, напряженности магнитного поля и температуры. Рассматривается деформация дебаевской сферы экранирования заряда в магнитном поле.

При рассмотрении взаимодействия элементарных частиц с внешним полем важными характеристиками, необходимыми для полного описания таких процессов, являются массовый и поляризационный операторы [1]. Знание аналитических свойств этих операторов в различных областях изменения параметров позволяет объяснить природу взаимодействия элементарных частиц с физическим вакуумом, а также те явления, которые являются следствием такого взаимодействия. С экспериментальной точки зрения наиболее традиционной задачей является изучение взаимодействия света и вещества [2], в частности исследование поляризационных свойств света при его прохождении через значительные области пространства с магнитным полем и тепловыми источниками. Такого рода задачи тесно связаны с астрофизическими объектами, в которых магнитные поля могут достигать значительных величин: $H_0=m^2/e=4{,}41\cdot 10^{13}$ Гс, а температуры порядка 10^6—10^9 К. С учетом сказанного представляется целесообразным исследование асимптотик поляризационного оператора $\Pi_{\mu\nu}$ по таким параметрам, как напряженность магнитного поля H, масса фермиона m, импульс фотона k и температура T.

В настоящей работе вычислен поляризационный оператор фотона, движущегося в постоянном однородном магнитном поле. Рассмотрены предельные значения параметров поля, температуры, импульса фотона и массы фермионов.

Поляризационный оператор фотона во внешнем постоянном и однородном магнитном поле в однопетлевом приближении запишется в виде

$$\Pi_{\mu\nu}(k)=ie^2\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Sp}\,\{\gamma_\mu G(p+k)\,\gamma_\nu G(p)\},$$

где явное выражение для пропагатора фермиона таково:

$$G(p)=-i\int\limits_0^\infty ds\exp\left\{is(p_\parallel^2-m^2+i\varepsilon)-i\frac{p_\perp^2}{eH}\,\mathrm{tg}\,(seH)\right\}\times$$

$$\times[m+\hat{p}+(m\gamma^1\gamma^2-ip_0\gamma^5\gamma^3+ip_3\gamma^5\gamma^0)\,\mathrm{tg}\,(seH)-(\gamma^1p_1+\gamma^2p_2)\,\mathrm{tg}^2\,(seH)].$$

Здесь ε — малая положительная добавка, определяемая выбором контура интегрирования; $\hat{p}=p_\alpha\gamma^\alpha$, $p_\parallel{}^2=p_0{}^2-p_3{}^2$, $p_\perp{}^2=p_1{}^2+p_2{}^2$. Тензорная структура и общие выражения для компонент оператора $\Pi_{\mu\nu}$ подробно описаны в работе [3]. Здесь мы ограничимся рассмотрением свойств

свертки $\Pi=g^{\mu\nu}\Pi_{\mu\nu}$ поляризационного оператора. Мы разобьем общее выражение для Π следующим образом:

$$\Pi(k,\ eH,\ T)=\Pi(k,\ 0,\ 0)+\Delta_H\Pi(k,\ eH)+\Delta_T\Pi(k,\ eH,\ T),$$

где слагаемые $\Delta_H\Pi$ и $\Delta_T\Pi$ соответствуют чисто полевому и температурному вкладам в поляризационный оператор. Расходимость, содержащаяся в $\Pi(k,\ 0,\ 0)$, устраняется перенормировкой, а для конечного выражения при малых k, т. е. $(k/m)^2\ll 1$, получим известный результат [1]:

$$\Pi_{\text{ren}}(k)=-\frac{e^2k^2}{4\pi^2}\left[\ln\frac{M^2}{m^2}+\frac{1}{5}\frac{k^2}{m^2}+O\left(\frac{k^4}{m^4}\right)\right].$$

Рассмотрим предел нулевых температур ($T=0$). В случае нулевого импульса фотона ($k_\mu=0$) полевая добавка к поляризационному оператору равна нулю при $m\neq 0$. Если же $m=0$ (что соответствует также пределу сверхсильного поля $eH/m^2\gg 1$ при $m\neq 0$), имеем $\Delta_H\Pi=|e|^3H/(2\pi^2)$. Далее изучим выражение для $\Delta_H\Pi(k_\parallel^2,\ eH)$ при $k_\perp^2=0$. В различных предельных случаях продольного импульса фотона, напряженности магнитного поля найдем:

при $(k_\parallel/m)^2\ll eH/m^2\ll 1$

$$\Delta_H\Pi(k_\parallel^2,\ eH)=\frac{e^2k_\parallel^2}{180\pi^2}\left(\frac{eH}{m^2}\right)^2\left[1+O\left(\frac{k_\parallel^2}{m^2},\ \left(\frac{eH}{m^2}\right)^2\right)\right],$$

при $eH/m^2\ll(k_\parallel/m)^2\ll 1$

$$\Delta_H\Pi(k_\parallel^2,\ eH)=-\frac{e^2}{6\pi^2}\left(\frac{eH}{m^2}\right)^2\left[1+\frac{k_\parallel^2}{6m^2}+O\left(\frac{k_\parallel^4}{m^4},\ \left(\frac{eH}{m^2}\right)^2,\ \left(\frac{eH}{k_\parallel^2}\right)^2\right)\right]$$

Учет условия $k_\perp^2\neq 0$ при значительном усложнении расчетов не приводит к принципиальному изменению полученных результатов.

Температурная часть поляризационного оператора $\Delta_T\Pi$ (при $k^2=0$) имеет вид

$$\Delta_T\Pi(0,\ eH,\ T)=-\frac{e^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^\infty\frac{ds}{s^2}\exp\left\{-\left(sm^2+\frac{n^2}{4sT^2}\right)\right\}\times$$

$$\times\left[sm(1+seH\operatorname{cth}seH)+1-\frac{n^2}{4sT^2}+\left(\frac{seH}{\operatorname{sh}seH}\right)^2\right]. \qquad (1)$$

После проведения интегрирования по s в (1) и суммирования методом, предложенным в работах [4, 5], в предельном случае высоких температур $eH/T^2\ll(m/T)^2\ll 1$ найдем

$$\Delta_T\Pi(0,\ eH,\ T)=\frac{e^2T^2}{3}\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{m}{\pi T}\right)^2+\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\left(\frac{eH}{T^2}\right)^2+\ldots\right\}. \qquad (2)$$

Здесь $\zeta(3)=1{,}202\ldots$ — дзета-функция Римана. Соответственно в пределе низких температур и слабого поля ($eH/m^2\ll(T/m)^2\ll 1$) получим

$$\Delta_T\Pi(0,\ eH,\ T)=\frac{e^2m^2}{\sqrt{2\pi^3}}\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{m}{T}\right\}\left(1+O\left(\frac{T}{m},\ \left(\frac{eH}{m^2}\right)^2\right)\right). \qquad (3)$$

Известно [6], что при $k_\mu\to 0$ из всех компонент оператора $\Pi_{\mu\nu}$ отличной от нуля является лишь компонента Π_{00}, которая пропорциональна дебаевскому радиусу экранирования заряда $r_D^{-2}\sim\Pi_{00}(k^2=0)$.

Этот результат доказывается с использованием тождества Уорда. Отсюда с учетом соотношений (2), (3) и конечной температуры несложно выписать радиус экранировки заряда в магнитном поле. Например, в пределе высоких температур имеем

$$r_D^2=\frac{4\pi e^2T^2}{3}\left\{1-\frac{3}{2}\left(\frac{m}{\pi T}\right)^2+\frac{7\zeta(3)}{8\pi^2}\left(\frac{eH}{T^2}\right)^2+\ldots\right\}.$$

С учетом радиационной поправки уравнение для полюса фотонного пропагатора в калибровке $k_0=0$ имеет вид

$$\mathbf{k}^2+4\pi\Pi_{00}^{\text{ren}}(k_0=0,\ \mathbf{k})=0, \tag{4}$$

где $\Pi_{00}^{\text{ren}}(k_0=0,\ \mathbf{k})=\Pi_{00}(\mathbf{k},\ eH)-\Pi_{00}(\mathbf{k},\ 0)$ — перенормированное выражение. Явный вид для перенормированной компоненты Π_{00} поляризационного оператора следующий:

$$\Pi_{00}^{\text{ren}}(\mathbf{k},\ eH)=-\frac{e^2}{2\pi^{3/2}}\int\limits_0^\infty ds_1\int\limits_0^\infty\frac{ds_2}{\sqrt{i}\,s}\exp\left\{-ism^2-i\frac{s_1s_2}{s}k_3^2-\right.$$

$$\left.-i\frac{\sin(s_1eH)\sin(s_2eH)}{eH\sin(seH)}k_\perp^2\right\}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_0}{2\pi}\exp\{isp_0^2\}\cdot\left[\left(m^2+p_0^2+\frac{1}{2is}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{s_1s_2}{s^2}k_3^2\right)eH\operatorname{ctg}(seH)-\left(i+\frac{\sin(s_1eH)\sin(s_2eH)}{eH\sin(seH)}k_\perp^2\right)\left(\frac{eH}{\sin(seH)}\right)^2\right], \tag{5}$$

где $s=s_1+s_2$. Учитывая явный вид $\Pi_{00}^{\text{ren}}(\mathbf{k},\ eH)$ (5), видим, что относительное $\mathbf{k}^2$ уравнение (4) является нелинейным интегральным уравнением. Точное решение уравнения (4) в общем случае весьма затруднительно, однако мы можем воспользоваться аналитичностью поляризационного оператора по импульсу фотона k_μ и (в низкоэнергетическом пределе $(k/m)^2\ll1$) разложить $\Pi_{00}^{\text{ren}}(\mathbf{k},\ eH)$ в ряд Тейлора по импульсу фотона. Тогда с точностью до второго члена разложения по $|\mathbf{k}|$ будем иметь

$$-4\pi\Pi_{00}^{\text{ren}}(\mathbf{k}=0,\ eH)=\mathbf{k}_\perp^2\left(1+\frac{4\pi}{m^2}\frac{\partial^2\Pi_{00}^{\text{ren}}}{\partial\varkappa_\perp^2}\bigg|_{\mathbf{k}=0}\right)+$$

$$+k_3^2\left(1+\frac{4\pi}{m^2}\frac{\partial^2\Pi_{00}^{\text{ren}}}{\partial\varkappa_3^2}\bigg|_{\mathbf{k}=0}\right), \tag{6}$$

$$\varkappa_\perp^2=(k_\perp/m)^2,\quad \varkappa_3^2=(k_3/m)^2.$$

В слабом магнитном поле $(eH/m^2\ll1)$ для производных, входящих в (6), имеем

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\varkappa_3^2}\bigg|_{\mathbf{k}=0}=\left(\frac{e^2H}{6\pi m}\right)^2,\quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial\varkappa_\perp^2}\bigg|_{\mathbf{k}=0}=-\frac{1}{10}\left(\frac{e^2H}{3\pi m}\right)^2.$$

Отсюда следует, что полюс фотонного пропагатора не смещается (т. е. единственное решение (4) $k_\perp^2=k_\parallel^2=0$). Следует указать, что в общем случае для величины, характеризующей радиус дебаевской

сферы экранирования заряда, с учетом второго тождества Уорда можно получить следующее выражение [7]:

$$r_D^{-2} = -\left(\frac{4\pi \Pi_{00}}{1 + \frac{4\pi}{m^2} \frac{\partial^2 \Pi_{00}}{\partial \varkappa^2}} \right)\Bigg|_{k_\mu = 0},$$

где

$$2\frac{\partial^2 \Pi_{00}}{\partial \varkappa^2} = \frac{\partial^2 \Pi_{00}}{\partial \varkappa_3^2} + \frac{\partial^2 \Pi_{00}}{\partial \varkappa_\parallel^2}, \quad \varkappa_{\perp,\parallel}^2 = k_{\perp,\parallel}^2/m^2.$$

С учетом сделанного замечания подчеркнем, что выражение (6) связано с деформацией дебаевской сферы экранирования заряда в магнитном поле в эллипсоид вращения с полуосями $r_\parallel$ и $r_\perp$. Размеры относительной деформации $\delta r = r_\perp/r_\parallel - 1$ определяются компонентой Π_{00} поляризационного оператора следующим образом:

$$\delta r = \frac{2\pi}{m^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varkappa_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varkappa_\perp^2} \right) \Pi_{00}^{\text{ren}} + o(e^4).$$

В частном пределе слабого поля и высоких температур найдем

$$\delta r \cong \frac{C_1}{6} \left(\frac{e^2 H}{\pi T^2} \right)^2; \quad \frac{eH}{T^2} \ll \left(\frac{m}{T} \right)^2 \ll 1,$$

где постоянная $C_1 = 0{,}684$. Соответственно для величины r_D^{-2} получим

$$r_D^{-2} = 4\pi e^2(T) T^2/3,$$

при этом $e^2(T) = e^2 \left[1 - \frac{e^2}{3\pi^2} \left(\ln \frac{T^2}{m^2} + C_2 \right) \right]^{-1}$, а $C_2 \approx 1{,}0775$.

Таким образом, мы показали, что асимптотики выражений для поляризационного оператора оказываются весьма чувствительными к тому, в какой области изменяются параметры, характеризующие энергию фотона, напряженность магнитного поля и температуру. Показано, что в магнитном поле дебаевская сфера экранирования заряда деформируется. Это приводит к анизотропии показателей преломления вдоль и поперек магнитного поля, которая может оказаться весьма существенной при прохождении светом больших расстояний. Отмеченный эффект может быть существен при рассмотрении взаимодействия высокотемпературной плазмы с излучением.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовая электродинамика. М., 1983. [2] Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1970. [3] Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Магницкий Б. В., Татаринцев А. В. Препринт НИИЯФ МГУ № 89-21/98. М., 1989. [4] Багров В. Г., Вшивцев А. С., Николаев А. В., Перес-Фернандес В. К. Препринт № 8 Томского филиала СО АН СССР. Томск, 1988. [5] Вшивцев А. С., Перес-Фернандес В. К.//ДАН СССР. 1989. 309, № 1. С. 70. [6] Фрадкин Е. С.//Тр. ФИАН. 1965. 29. С. 7. [7] Старостин А. Н. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1971.

Поступила в редакцию
29.01.90