УДК 535.231.6

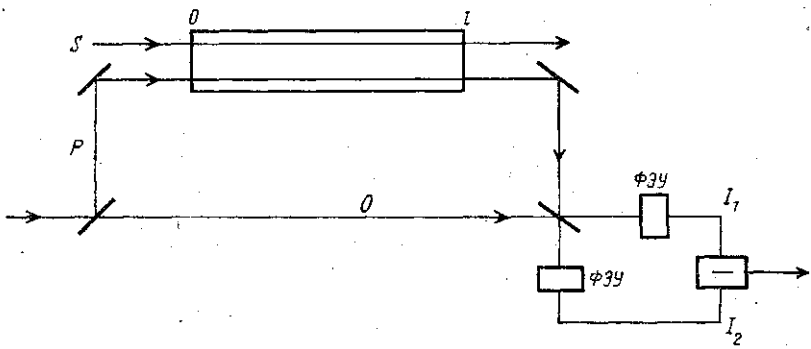
О ВЛИЯНИИ ДИССИПАЦИИ В КЕРРОВСКОЙ СРЕДЕ НА ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ ВОЛН

Ю. И. Воронцов

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Показано, что при квазиневозмущающем измерении энергии волны за счет взаимодействия волн в керровской среде диссипация ограничивает погрешность измерения числа квантов N величиной $\sqrt{Ng}$ (q — коэффициент поглощения). Самовоздействие волн и диссипация обусловливают оптимальную мощность пробной волны и длину взаимодействия.

Известно несколько принципиальных схем измерения энергии электромагнитной волны с помощью оптического эффекта Керра [1—4]. Одна из них изображена на рисунке [3]. В нелинейной прозрачной



среде взаимодействуют сигнальная (измеряемая) и пробная волны. Фаза пробной волны на выходе зависит от интенсивности сигнальной (эффект взаимодействия) и собственной интенсивности (эффект самовоздействия). Наблюдая изменение фазы пробной волны относительно фазы опорной, можно оценить энергию сигнальной волны. Предел погрешности оценивания энергии определяется: а) пределом погрешности измерения сдвига фазы пробной волны, б) неопределенностью изменения фазы пробной волны за счет самовоздействия, в) возмущением поля сигнальной волны при взаимодействии с пробной, г) неопределенностью сдвига фазы, обусловленной диссипацией сигнальной и пробной волн.

Рассматриваемое измерение энергии иногда называют невозмущающим, но, строго говоря, он таковым не является, поскольку взаимодействие волн здесь зависит не от энергии, а от квадрата напряженности электрического поля. Подобные измерения названы квазиневозмущающими [4]. Принципиальный предел погрешности такого измерения энергии равен $\Delta W=(\overline{W}\hbar/\tau)^{1/2}$ [4], $\overline{W}$ — среднее значение энергии, τ — длительность измерения.

При оптическом эффекте Керра относительное изменение диэлектрической проницаемости на частоте пробной волны ω_p

$$\delta\varepsilon/\varepsilon=\gamma_{12}|E_s|^2+\gamma_{22}|E_p|^2, \qquad (1)$$

где E_s, E_p — комплексные амплитуды электрических полей сигнальной и пробной волн в нелинейной среде, γ_{12}, γ_{22} — коэффициенты взаимодействия и самовоздействия. Комплексные амплитуды E_s, E_p можно считать функциями переменных $\xi_s=t-x/v_s$, $\xi_p=t-x/v_p$ и x, где $v_{s,p}=v_{0s,p}/(1+\delta\varepsilon/2\varepsilon)$ — фазовые скорости сигнальной и пробной волн (в приближении $\delta\varepsilon/\varepsilon\ll 1$), x — пространственная координата. Неоднородностью поля в поперечной плоскости пренебрежем.

В общем случае в нелинейной среде могут происходить генерация гармоник и комбинационных волн, параметрическое усиление, нелинейное поглощение и другие эффекты. Здесь, как и в других работах, посвященных анализу данного принципа измерения энергии, будем считать, что все побочные нелинейные эффекты исключены (например, за счет соответствующей дисперсии).

Сдвиг фазы пробной волны за счет нелинейности среды на длине взаимодействия l равен

$$\varphi_l=(\omega_p/2v_{0p})\int_0^l[\gamma_{12}|E_s(\xi_s,\ x)|^2+\gamma_{22}|E_p(\xi_p,\ x)|^2]\,dx,$$

где интегрирование проводится при постоянном зачении ξ_p. Поскольку фазовые скорости волн неодинаковы, сигнальная и пробная волны смещаются относительно друг друга. Поэтому величина φ_l будет зависеть не от значения $|E_s|^2$ в одной точке профиля огибающей, а от среднего его значения на некотором интервале. При равенстве скоростей v_{0s} и v_{0p} и малости нелинейных эффектов этот интервал может быть не больше нескольких длин сигнальной волны. Минимальная разность фазовых скоростей ограничивается неопределенностью интенсивности пробной волны. В связи с тем что соотношение (1) справедливо для полей, усредненных на интервале больше длины сигнальной волны, усреднением сдвига фазы за счет относительного смещения волн можно пренебречь. Будем считать $\xi_s=\xi_p=\xi$, $v_{0s}=v_{0p}=v_0$.

Энергия волны на участке длительностью τ_s равна

$$W=\int_{\xi}^{\xi+\tau_s}(S/\rho)|E|^2\,d\xi.$$

Здесь S — эффективная площадь сечения, ρ — волновое сопротивление. Во время измерения энергии величины ε и ρ зависят от величины $|E_p|^2$, которая является случайной. Поэтому погрешность оценки W зависит не только от погрешности измерения $|E_s|^2$, но и от неопределенности значения ρ. Этим и объясняется указанный выше принципиальный предел погрешности измерения энергии. Влияние диссипации имеет смысл учитывать, если обусловленная ею погрешность будет больше принципиального предела. При этом условии можно пренебречь неопределенностью ρ и считать

$$W=(S/\bar{\rho})\int_{\xi}^{\xi+\tau_s}|E_s|^2\,d\xi.$$

Здесь $\bar{\rho}$ — среднее значение ρ.

Для оценивания W необходимо измерить величину

$$\Psi \equiv \int_{\xi}^{\xi+\tau_s} \varphi_l(\xi)\, d\xi = (\omega_p/2v_0) \int_0^l \Big[\gamma_{12} \int_{\xi}^{\xi+\tau_s} |E_s(\xi, x)|^2\, d\xi +$$

$$+ \gamma_{22} \int_{\xi}^{\xi+\tau_s} |E_p(\xi, x)|^2\, d\xi\Big]\, dx.$$

Если спектр сигнальной волны относительно узкий, можно считать

$$\int_{\xi}^{\xi+\tau_s} |E_s|^2\, d\xi \simeq N_s(\tau_s, x)\, \hbar\omega_s \bar{\rho}/S,$$

где $N_s(\tau_s, x)$ — число фотонов, проходящих через точку x в интервале $[t, t+\tau_s]$, ω_s — средняя частота сигнальной волны. Изменение величины ψ за счет энергии сигнальной волны равно

$$\Psi_{12} = D_{12} \int_0^l N_s(\tau_s, x)\, dx,$$

где $D_{12} = \gamma_{12}\hbar\omega_s\omega_p\bar{\rho}/(2Sv_0)$.

Изложенная постановка задачи отличается от принятой в известных публикациях, в частности в [5], тем, что 1) φ_l считается функцией не числа фотонов, а квадрата напряженности поля; 2) учитывается, что для оценивания энергии необходимо измерять не сдвиг фазы φ_l, а его интеграл ψ; 3) учитывается, что погрешность оценки энергии определяется не только погрешностью измерения ψ, но и неопределенностью изменения ρ.

Найти соотношение, определяющее дисперсию величины ψ_{12}, можно различными способами. Можно, например, вычислять эволюцию гейзенберговских операторов волн, разбив среду на бесконечно короткие участки, вводя феноменологически затухание и соответствующие ему случайные поля [5]. Здесь используется оригинальный, достаточно очевидный и очень простой метод, в основе которого — неделимость фотона на части при его поглощении. У фотона, входящего в среду, есть только две возможности: дойти до выхода или поглотиться. При линейном поглощении вероятности этих событий не зависят от плотности потока фотонов. Следовательно, вероятность заданного числа фотонов, проходящих через любое сечение, будет определяться биномиальным законом. Если в среднем $\overline{N_s(\tau_s, x)} = \overline{N_s(\tau_s, 0)} \exp(-\alpha x)$, то вероятность, что фотон не будет поглощен до точки x, равна $p(x) = \exp(-\alpha x)$, а вероятность поглощения $q(x) = 1 - p(x)$. Дисперсия числа N_s равна

$$\sigma_N^2(x) = \overline{N_s(0)}\, p(x)\, q(x) + \sigma_N^2(0)\, p^2(x). \tag{2}$$

Среднее значение величины ψ_{12} в этом случае равно

$$\bar{\psi}_{12} = (D_{12} q/\alpha) N_s(\tau_s, 0), \quad \text{где } q \equiv q(l). \tag{3}$$

Дисперсия ψ_{12} без учета случайности величины ρ

$$\sigma_{\psi_1}^2 = D_{12}^2 \cdot 2 \int_0^l \int_x^l [\overline{N_s(x) N_s(y)} - \overline{N_s(x)}\, \overline{N_s(y)}]\, dx\, dy. \tag{4}$$

Имеет место соотношение

$$\overline{N(x)N(y)}=\sum_{N(x)}\sum_{N(y)}N(x)N(y)P(N(y)|N(x))P(N(x))=$$

$$=\sum_{N(x)}N(x)P(N(x))\overline{N(y)}|_{N(x)}=\overline{N^2(x)}p(y-x).$$

Здесь $P(N(y)|N(x))$ — вероятность, что через точку y пройдет $N(y)$ фотонов, если через точку x вошло $N(x)$ фотонов, $P(N(x))$ — вероятность, что через точку x проходит $N(x)$ фотонов, $p(y-x)$ — вероятность поглощения фотона на участке $y-x$, $\overline{N(y)}|_{N(x)}=\sum N(y)P(N(y)|$ $|N(x))$ — условное среднее. При биномиальном законе распределения вероятностей $\overline{N(y)}|_{N(x)}=N(x)p(y-x)$. Учтя, что при заданном значении $N(0)$

$$\overline{N^2(x)}=N(0)p(x)q(x)+N^2(0)p^2(x);$$

$$N(x)=N(0)p(x),\ \overline{N(y)}=N(0)p(y),$$

из (4) получим

$$\sigma^2_{\psi_{12}}=(D_{12}/\alpha)^2N_s(\tau_s,\ 0)(1-\exp\{-2\alpha l\}-2\alpha l\exp\{-\alpha l\}). \tag{5}$$

Соотношения (3), (5) позволяют определить пределы погрешностей оценивания значений $N_s(0)$ и $N_s(l)$, обусловленные диссипацией сигнальной волны. При биномиальном законе распределения наиболее вероятное число $N_s(l)$ равно целой части числа $(N_s(0)+1)p$. В случае $N_s(0)\gg 1$, если не используется априорная вероятность значений $N_s(0)$, оценкой $N_s(0)$ по методу максимального правдоподобия будет величина $\tilde{N}_s(0)=\alpha\psi_{12}/qD_{12}$, а оценкой $N_s(l)$ — величина $\tilde{N}_s(l)=$ $=\tilde{N}_s(0)p$.

Погрешность оценок обусловлена погрешностью измерения величины ψ $(\sigma_{\tilde{\psi}})$ и случайностью величины ψ_{12} при заданном значении $N_s(0)$ $(\sigma_{\psi_{12}})$. Полная дисперсия оценки $\tilde{N}_s(0)$ равна

$$\sigma^2_{\tilde{N}(0)}=(\sigma^2_{\tilde{\psi}}+\sigma^2_{\psi_{12}})(\alpha/qD_{12})^2.$$

Предел среднеквадратичной погрешности оценки $\tilde{N}_s(0)$, обусловленный диссипацией сигнальной волны,

$$\sigma_{\tilde{N}(0)}(\alpha)=\sigma_{\psi_{12}}/\alpha qD_{12}=\sqrt{N_s(0)}(1-\exp\{-2\alpha l\}-$$

$$-2\alpha l\exp\{-\alpha l\})^{1/2}/(1-\exp\{-\alpha l\}). \tag{6}$$

В случае $\alpha l\ll 1$, т. е. $q\ll 1$, $\sigma_{\tilde{N}(0)}(\alpha)\simeq\sqrt{N_s(0)q}$. Соответствующий предел погрешности оценки числа прошедших фотонов согласно (2) и (6) равен

$$\sigma_{\tilde{N}(l)}(\alpha)=[\sigma^2_{\tilde{N}(0)}(\alpha)p^2+\overline{N_s(0)}pq]^{1/2}. \tag{7}$$

При $q\ll 1$ $\sigma_{\tilde{N}(l)}(\alpha)\simeq\sqrt{2\overline{N_s(l)}q}$.

Пределы (6) и (7) будут больше принципиального для этой схемы предела $(N_s/\omega_s\tau)^{1/2}$ при $q>1/\omega_s\tau$. Здесь $\tau=l/v_0$. Слабая диссипация не препятствует измерению чисел $N_s(0)$ и $N_s(l)$ с погрешностью много

меньшей, чем неопределенность числа квантов в когерентном состоянии.

Обсудим влияние затухания и самовоздействия пробной волны. Изменение величины ψ за счет самовоздействия пробной волны равно $\psi_{22}=D_{22}\int_0^l N_p(\tau_s, x)\,dx$, где $N_p(\tau_s, x)$ — число фотонов пробной волны, проходящих через точку x за время τ_s. Если исключена тепловая генерация фотонов, то при линейном затухании когерентное состояние волны сохраняется. Меняется лишь среднее значение и дисперсия числа фотонов. Дисперсия ψ на выходе из нелинейной поглощающей среды без учета взаимодействия с сигнальной волной и в приближении $\rho=\bar{\rho}$ равна

$$\sigma^2_{\psi_{22}}=(\tau_s/2\sigma_{N_p(l)})^2+D^2_{22}\left[\Delta\int_0^l N_p(x)\,dx\right]^2,$$

где $\sigma^2_{N_p(l)}$ — дисперсия числа фотонов, вышедших из точки l за время τ_s. Тем же методом, что и при вычислении величины $\sigma_{\psi_{11}}$, получим в приближении $q\ll 1$, $\sigma^2_{N_p(l)}=\overline{N_p(l)}$

$$\left[\Delta\int_0^l N_p(x)\,dx\right]^2\approx\overline{N_p(0)}\,q^3/\alpha^2+\sigma^2_{N_p(0)}q^2/\alpha^2=\overline{N_p(0)}\,(1+q)\,q^2/\alpha^2.$$

Теоретически самовоздействие можно устранить либо за счет частотной зависимости нелинейности среды, либо путем компенсации самовоздействия при прохождении пробной волны через среду с нелинейностью противоположного знака. В средах с диссипацией такая компенсация не может быть полной в принципе. Понимая под D_{22} коэффициент самовоздействия с учетом возможной компенсации, можно считать в общем случае

$$\sigma^2_{\psi_{22}}=\tau_s^2/4\overline{N_p(l)}+\overline{N_p(l)}\,D^2_{22}(1+q)\,q^2/\alpha^2p\geqslant\tau_sD_{22}(q/\alpha)\,[(1+q)/p]^{1/2}.$$

Минимальное значение достигается при $\bar{N}_p(l)=(\tau_s/2D_{22})\,(\alpha/q)[p/(1+q)]^{1/2}$. Соответствующая погрешность оценки $N_s(0)$ равна

$$\sigma_{\bar{N}(0)}(D_{22})=\sigma_{\psi_{22}}/(D_{22}q/\alpha)\geqslant[\tau_s(D_{22}/D^2_{12})(\alpha/q)\,[(1+q)/p]^{1/2}]^{1/2}\underset{q\to 0}{\to}$$

$$\to(\tau_sD_{22}/D^2_{12}l)^{1/2}. \qquad (8)$$

Влияние диссипации пробной волны в одном из специфических состояний в схеме доплеровского измерения импульса рассмотрено в [6].

Схемы квазиневозмущающего измерения энергии, в том числе и схемы на основе оптического эффекта Керра, представляют интерес постольку, поскольку позволяют оценить энергию до и после измерения с погрешностью меньшей, чем неопределенность энергии в когерентном состоянии. Найденные выше соотношения позволяют определить, во сколько раз предел погрешности измерения энергии может быть ниже, чем $\sqrt{N}\,\hbar\omega_s$, при использовании известных керровских сред. Из соотношений (6) и (8) получим соответственно

$$\beta\equiv\sigma_{\bar{N}(0)}/\sqrt{N(0)}\geqslant\sqrt{q}\approx\sqrt{\alpha l},\ \beta\geqslant(\tau_sD_{22}/(lN(0)\,D^2_{12}))^{1/2}.$$

Следовательно, $\beta_{min} \approx (\alpha\hbar\omega_s b/W_s(0)D_{12})^{1/4}$, где $W_s(0)=N(0)\hbar\omega_s/\tau_s$, $b=D_{22}/D_{12}$. Можно показать, что $D_{12}=3\hbar\omega_s\omega_p|^2\chi_{12}^{(3)}/4S$, где $\chi_{12}^{(3)}\equiv\chi^{(3)}(\omega_p+\omega_s-\omega_s)$—спектральная компонента кубической восприимчивости.

Кварцевые оптические волокна при $\lambda\approx1{,}5$ мкм имеют $\chi^{(3)}\approx4\cdot10^{-33}$ (СИ), затухание до 0,2 дБ/км ($\alpha\approx10^{-5}$ м$^{-1}$). В этом случае при $S=50$ мкм^2 будет $\alpha\hbar\omega_s/D_{12}\approx10^{-3}$. Соответственно в случае $b\approx1$ может быть $\beta<1$ только при $W_s>10^{-3}$ Вт. При этом $l\sim\beta^2/\alpha=10^5\beta^2$ м. Оценки показывают, что необходимо искать материалы с меньшим значением $\alpha/\chi_{12}^{(3)}$ и использовать какой-либо способ уменьшения b, чтобы реализация схемы стала возможной при меньшей длине взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брагинский В. Б., Вятчанин С. П.//ДАН СССР. 1981. **259**, № 3. С. 570. [2] Брагинский В. Б., Вятчанин С. П.//ДАН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1136. [3] Imoto N., Haus H. A., Yamamoto Y.//Phys. Rev. 1985. **A32**. P. 2287. [4] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989. [5] Imoto N., Saito S.//Phys. Rev. 1989. **A39**. P. 675. [6] Брагинский В. Б., Халили Ф. Я.//ЖЭТФ. 1988. **94**, № 1. С. 151.

Поступила в редакцию
03.04.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.385

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ПОЛЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА ИНТЕНСИВНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

В. И. Канавец, А. С. Нифанов, А. И. Слепков

(кафедра радиофизики)

Развит метод теоретического анализа самосогласованного взаимодействия прямолинейного электронного потока с полями многомодовых периодических волноводов, используемых в релятивистской СВЧ-электронике. Проведенный анализ системы конечной длины показал, что вблизи поверхности волновода локализовано вихревое поле, соответствующее поверхностной волне. Влияние потока приводит к формированию увлекаемых полей, имеющих максимум в области потока. Рассеяние поля поверхностной волны и поля потока на неоднородностях системы приводит к образованию мощного приосевого излучения.

В традиционной и в релятивистской СВЧ-электронике начали широко применяться пространственно-развитые периодические волноводы [1]. Преимущественно продольное взаимодействие мощного электронного потока с электромагнитным полем в большой степени определяется электронной средой [2]. Важную роль играет взаимодействие на частоте «π»-вида моды E_{01} гофрированного и диафрагмированного волноводов [3]. Особенности взаимодействия описываются в рамках матричной методики [4]. Взаимодействие на частоте «π»-вида используется при разработках нерелятивистских ЛБВ [5], релятивистских генераторов поверхностной волны [6], многоволновых черенковских генераторов (МВЧГ) [7].