ЛИТЕРАТУРА

[1] Козарь А. В.//Тез. докл. на Всесоюз. науч.-техн. конф. «Проектирование и применение радиоэлектронных устройств на диэлектрических волноводах и резонаторах» (27—29 сент. 1983 г.). Саратов, 1983. С. 136. [2] Козарь А. В.//Тез. докл. на Всесоюз. науч. семинаре «Методы синтеза и применение многослойных интерференционных систем» (М., 18—19 апр. 1984 г.). М., 1984. С. 118. [3] Козарь А. В.//Опт. и спектр. 1985. 59, № 5. С. 1132. [4] Козарь А. В.//Тез. докл. на Всесоюз. науч. семинаре «Методы синтеза и применение многослойных интерференционных систем» (М., 18—19 апр. 1984). М., 1984. С. 116. [5] Козарь А. В.//Междунар. симп. «Прикладная оптика 89». Прага. Т. 1. С. 59.

Поступила в редакцию
14.03.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.222

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КВАЗИКРУГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ: МОДЕЛИ БЮРГЕРСОВСКОГО ТИПА И АКУСТО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Ю. Н. Маков, О. В. Руденко

(кафедра акустики)

Рассмотрена нелинейная эволюция двумерных течений в идеальной жидкости, линии тока которых являются модулированными по углу окружностями. Для решения этой задачи получено приближенное уравнение типа уравнения Бюргерса для функции тока и использованы аналогии с волновыми задачами нелинейной акустики.

Известно, что уравнения нелинейной акустики [1, 2] получены из полной системы нестационарных уравнений динамики сплошных сред с использованием ряда упрощающих предположений. Однако при анализе обычных задач гидродинамики аналогичные приближения используются крайне редко, хотя именно этот путь приводит к простым моделям, дающим аналитическое описание процесса (см., напр., [3]).

Здесь решена классическая задача об эволюции квазикруговых течений на основе уравнения для функции тока, подобного уравнению Бюргерса. При этом использованы методы упрощения и аналогия с волновыми задачами нелинейной акустики.

Двумерное вихревое течение идеальной несжимаемой жидкости в полярных координатах r, φ описывается двумя уравнениями для функции тока ψ и завихренности Ω [4]:

$$\Omega=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)=0. \tag{2}$$

Радиальная и азимутальная составляющие скорости течения выражаются через ψ так: $v_r=(-1/r)\,\partial\psi/\partial\varphi$, $v_\varphi=\partial\psi/\partial r$.

Исходя из точного порождающего решения этой системы в виде стационарного вращательного движения:

$$\psi=\psi_0(r),\quad \Omega=\Omega_0(r), \tag{3}$$

воспользуемся известным в радиофизике «методом медленно изменяющегося профиля» [2]. Обобщим решение (3) для нестационарных и неосесимметричных течений:

$$\psi=\psi(r,\ \varphi_*=\mu\varphi,\ t_*=\mu t),\ \Omega=\Omega(r,\ \varphi_*,\ t_*). \tag{4}$$

Здесь $\mu\ll 1$ — малый параметр, учитывающий «медленность» изменения функций по азимутальному углу и времени.

Ограничиваясь членами низшего порядка малости по μ, перейдем от (1), (2) к «укороченной» системе уравнений. Она отличается от (1), (2) лишь тем, что в правой части (1) нет последнего слагаемого, имеющего более высокий порядок малости. Отыскивая решение укороченных уравнений в виде

$$\psi=\frac{r^2}{2\tau}f(\varphi_*,\ t_*) \tag{5}$$

(где τ — константа с размерностью времени, f — неизвестная безразмерная функция), придем к уравнению типа простых волн [2]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{\tau}f\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0. \tag{6}$$

Заметим, что такого же упрощения исходной задачи удается достичь, положив в (4) $\varphi_*=\mu G(\varphi)$.

Известное решение (6)

$$f=\Phi\left(\varphi-\frac{t}{\tau}f\right),\quad \psi=\frac{r^2}{2\tau}\Phi\left(\varphi-\frac{2t}{r^2}\psi\right) \tag{7}$$

в нашем случае описывает эволюцию квазикругового течения, заданного в начальный момент $t=0$ конкретным видом функции $\Phi(\varphi)$. Иными словами, (7) есть решение задачи об эволюции начального возмущения в виде функции f, модулирующей по азимуту чисто круговое течение $\psi=r^2/2\tau$.

Решение (7) позволяет строить линии тока $\psi=\mathrm{const}$ в последовательные моменты времени t, для чего неявную функцию (7) удобно разрешить относительно $\varphi=\varphi(r,\ t)$ и воспользоваться обычной для нелинейной акустики графической процедурой [1].

Однако, как и в случае простых волн, решение (7) при достаточно больших t описывает $\psi(r,\ \varphi)$ неоднозначно, что противоречит самому смыслу функции ψ. Для устранения неоднозначности воспользуемся аналогией с акустикой, где учет высокочастотной диссипации в уравнении Бюргерса «снимает» особенность в профиле простой волны и позволяет правильно описать положение и эволюцию разрыва — ударного фронта.

Для исследуемого течения эту процедуру можно реализовать, вводя естественным образом эффект вязкости. Затем, получив решение более общего уравнения, следует перейти к пределу нулевой вязкости, поскольку рассматривается модель идеальной среды.

Для жидкости с коэффициентом вязкости $\nu\neq 0$ уравнение (2) будет иметь вид [4]

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}-\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)=\nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi^2}\right). \tag{8}$$

Используя описанные выше приближения, при «укорочении» уравнения (8) учтем помимо членов порядка μ член второго порядка малости ($\sim\mu^2$). При этом получится уравнение типа Бюргерса:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{\tau}f\frac{\partial f}{\partial\varphi}=\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}. \tag{9}$$

Это уравнение «испорчено» присутствием переменной r в правой части (напомним, что $f=f(t,\ \varphi)$). Однако в дальнейшем мы совершим предельный переход $\nu\to 0$ к идеальной жидкости, и формальное противоречие, связанное с видом правой части (9), будет устранено. Эта процедура избавляет решение (7) от неоднозначности и позволяет описать эволюцию течения при любых значениях времени t.

Напомним, что замена Хопфа—Коула позволяет свести (9) к линейному уравнению диффузии и записать решение для любой начальной функции $f(\varphi,\ 0)$:

$$f(\varphi,\ t)=-2\nu_1\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2\nu_1}\left[\frac{(\varphi-\varphi')^2}{2t_1}+\int\limits^{\varphi'}f(\varphi'',\ 0)\,d\varphi''\right]\right\}d\varphi'. \tag{10}$$

Здесь $\nu_1=\nu\tau/r^2$, $t_1=t/\tau$. Для произвольной $f(\varphi,\ 0)$ довольно трудно найти асимптотику решения (10) при $\nu_1\to 0$. Однако в акустике детально исследована нелинейная трансформация ряда конкретных волновых профилей с разрывами, и мы этими результатами воспользуемся.

Пусть начальное квазикруговое течение описывается функцией тока

$$\psi(\varphi,\ 0)=\frac{r^2}{2\tau}f(\varphi,\ 0)=\frac{r^2}{2\tau}(1-2\varepsilon\sin\varphi). \tag{11}$$

Заметим, что при малых ε линии тока (11) имеют вид эллипсов. Удобно перейти к новым переменным, положив

$$f(\varphi,\ t)=1-2\varepsilon F\left(\theta=\varphi-\frac{t}{\tau},\ z=2\varepsilon\frac{t}{\tau}\right). \tag{12}$$

Уравнение Бюргерса (9) примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial z}-F\frac{\partial F}{\partial\theta}=\Gamma\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2},\quad \Gamma=\frac{\nu\tau}{2\varepsilon r^2}, \tag{13}$$

а начальное условие (11) —

$$F(\theta,\ z=0)=\sin\theta. \tag{14}$$

Задача (13), (14) тождественна известной задаче нелинейной акустики об искажении интенсивного гармонического сигнала, результатами которой [1, 2] мы здесь и воспользуемся.

До момента появления неоднозначности $z=z_s=1$ следует положить в (13) $\Gamma=0$. С учетом начального условия (14) получим

$$F=\sin(\theta+zF). \tag{15}$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение (15) так:

$$\frac{1-f}{2\varepsilon}=\sin\left(\varphi-\frac{t}{\tau}f\right). \tag{16}$$

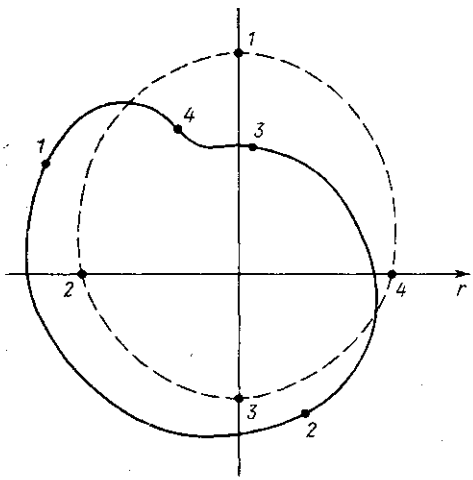
Для функции тока ψ формулу (16) удобно переписать в виде

$$\varphi=\arcsin\left[\frac{1}{2\varepsilon}\left(1-\frac{2\tau\psi}{r^2}\right)\right]+\frac{t}{\tau}\frac{2\tau\psi}{r^2}. \tag{17}$$

Выражение (17) позволяет строить линии тока $2\tau\psi=C^2=\mathrm{const}$ для любого момента времени, не превосходящего $t_s=\tau/2\varepsilon$ ($z_s=1$), исходя из начальной формы этих линий, задаваемой в виде

$$\varphi=\arcsin\left[\frac{1}{2\varepsilon}\left(1-\frac{C^2}{r^2}\right)\right] \quad \text{или} \quad r^2=\frac{C^2}{1-2\varepsilon\sin\varphi}. \tag{18}$$

Идея построения заключается в следующем. Выбирая на исходной кривой (18) точку с фиксированным r и соответствующим значением φ, перемещаем ее на дополнительный угол, который определяется вторым слагаемым в правой части (17) и увеличивается с ростом t. Точки исходной кривой (18) с меньшими r будут смещаться на больший угол. Этот эффект «накапливается» со временем, и при $t=t_s$ функция ψ становится многозначной. Рисунок 1 иллюстрирует процесс деформации линии тока (18) при $t=0$ до момента $t=t_s$.



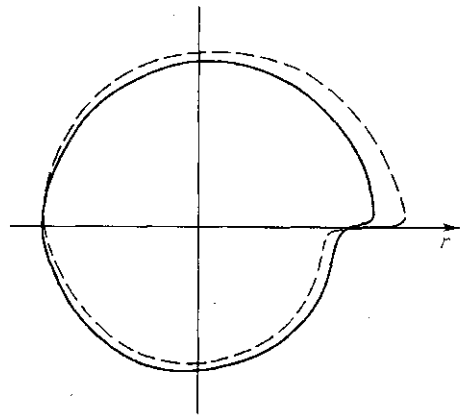


Рис. 1. Начальная кривая линии тока (18) при $t/\tau=0$ (штриховая линия) и ее деформированный вид (17) при $t/\tau=1/2\varepsilon$ (сплошная линия) с параметрами $\varepsilon=0{,}25$, $C=5$. Переход конкретных точек в новое положение показан их одноименной нумерацией на обеих кривых

Рис. 2. Трансформация линии тока на «разрывной» стадии при $t/\tau=5$ (штриховая линия) и $t/\tau=10$ (сплошная линия) во вращающейся системе координат: $\theta=\varphi-t/\tau$. Значения ε, C те же, что и на рис. 1

При $t>t_s$ решение (17) несправедливо и нужно воспользоваться асимптотикой решения (10) при $\nu_1\to 0$ [1, 2], которая наиболее просто запишется для значений $z=2\varepsilon t/\tau>\pi/2$:

$$F=\frac{1}{1+z}\left[-\theta+\pi\,\mathrm{sgn}\,\theta\right]. \tag{19}$$

В исходных переменных решение (19) примет вид

$$f(\varphi,\ t)=1-\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon t/\tau}\left[-\left(\varphi-\frac{t}{\tau}\right)+\pi\,\mathrm{sgn}\left(\ -\frac{t}{\tau}\right)\right]. \tag{20}$$

Выражение (20) позволяет строить линии тока (уравнение которых $2\tau\psi=C^2$ или $r^2=C^2/f(\varphi, t)$) на той стадии их эволюции, когда образуется участок с крутым фронтом по координате φ. С течением времени, как следует из (20), «амплитуда» этого разрыва уменьшается, стремясь к нулю.

Рисунок 2 иллюстрирует процесс трансформации линии тока на «разрывной» стадии. Видно, что одновременно происходят два процесса: равномерное вращение вихря с угловой скоростью $\omega=\tau^{-1}$ и его нелинейная трансформация, определяемая безразмерным значением времени $z=2\varepsilon t/\tau$. Нелинейные искажения проявляются тем сильнее, чем больше параметр ε угловой модуляции формы исходного вихря и чем больше угловая скорость ω его «закрутки». С течением времени модулированные по φ линии превращаются в идеально круговые $r^2=C^2$.

Можно показать, что описанные стадии эволюции квазикругового течения — искажение линий тока, образование разрывных участков с их последующим «затуханием» — характерны и для угловой модуляции иных (по сравнению с (11)) форм. Описанные явления иллюстрируют также факт нелинейной устойчивости кругового течения по отношению к рассмотренному классу пространственных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., 1975. [2] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979. [3] Гусев В. Э., Руденко О. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1978. 19, № 4. С. 117. [4] Бетчелор Д. Введение в динамику жидкости. М., 1973.

Поступила в редакцию
12.02.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

УДК 536.6:534.231

ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ГРУНТА В МЕЛКОМ МОРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИЕМНИКА ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

Б. И. Гончаренко, В. А. Гордиенко, Е. О. Ермолаева

(кафедра акустики)

Обсуждаются методы исследования отражающих свойств грунта на низких частотах с помощью комбинированных приемных устройств. Сравниваются значения коэффициента отражения звукового сигнала от дна, полученные путем формирования однонаправленных характеристик приемной системы и интерференционным методом. Отмечается, что уменьшение погрешности может быть достигнуто за счет одновременного использования данных о разрезах поля давления и вертикальной компоненты поля колебательной скорости.

Изучение акустических параметров грунта является важной составной частью работ по исследованию распространения звука в мелком море. Известно, что вариации затухания звука при изменении свойств дна достигают в отдельных случаях 30—40 дБ [1, 2].

Исследование акустических характеристик подводного грунта и построение его акустической модели проводится в основном двумя методами: путем изучения поля отраженного от дна сигнала [1, 3—6] или изучения физических параметров донных осадков [2, 7, 8].