

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958:532.5

ДИСПЕРСИЯ ВОЛН ОТ МГНОВЕННОГО ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА ПОВЕРХНОСТИ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

М. Б. Тверской

(кафедра математики)

Изучается качественное и количественное влияние флотации на дисперсионные характеристики волн, образованных мгновенным точечным источником на поверхности жидкости.

1. Введение

В данной работе продолжены исследования, связанные с изучением динамики флотирующей жидкости и начатые в [1—4]. Под флотирующей жидкостью принято понимать жидкость, на поверхности которой плавают весомые, не взаимодействующие друг с другом частицы некоторого вещества. Такую ситуацию можно моделировать, рассматривая свободную поверхность жидкости как весомую с поверхностной плотностью распределения массы $\sigma \geq 0$. Всюду ниже предполагается $\sigma = \text{const}$.

Целью настоящей работы является исследование дисперсионных эффектов, проявляющихся при распространении по поверхности флотирующей жидкости волн, вызванных мгновенным точечным источником. Ниже будет показано, что наличие флотирующего материала оказывает не только количественное, но и качественное влияние на эти эффекты.

2. Фазовая и групповая скорости линейных волн

В работе [3] было выведено нелинейное дисперсионное соотношение для плоских волн, распространяющихся по поверхности флотирующей жидкости бесконечной глубины. Оно имеет вид

$$\omega^2 = \frac{gk}{1 + \sigma k \rho^{-1}} [1 + R(\sigma k \rho^{-1})(ka)^2 + \dots]. \quad (1)$$

Здесь $k \equiv 2\pi/\lambda$ — волновое число, ω и a — соответственно частота и амплитуда волны, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, $R(x)$ — некоторая дробно-линейная функция, причем $R(0) = 1$, в силу чего в отсутствие флотации, т. е. при $\sigma = 0$, выражение (1) перейдет в известное дисперсионное соотношение Стокса для волн на поверхности тяжелой бесконечно-глубокой жидкости [5]:

$$\omega^2 = gk(1 + (ka)^2 + \dots). \quad (2)$$

Будем считать, что амплитуда волн достаточно мала, т. е. $ka \ll 1$, и рассмотрим линеаризованное по a дисперсионное соотношение (1):

$$\omega^2 = \frac{gk}{1 + \sigma k \rho^{-1}}. \quad (3)$$

Заметим, что если в отсутствие флотации, как следует из (2), частота волн может принимать любые значения при соответствующем выборе волнового числа k , то при наличии флотации имеет место эффект ограничения частоты: $\omega \leq \omega_{\text{max}} \equiv (g\rho/\sigma)^{1/2}$, сохраняющийся и в нелинейном случае [3].

Определим фазовую и групповую скорости линейных волн. Они окажутся равными соответственно

$$c(k) \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} (1 + \sigma k \rho^{-1})^{-1/2},$$

$$C(k) \equiv \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} (1 + \sigma k \rho^{-1})^{-3/2}. \quad (4)$$

3. Дисперсия волн от мгновенного точечного источника

Рассмотрим волны, образующиеся на поверхности флотирующей жидкости от точечного мгновенного источника. Эти волны распространяются изотропно, и различные возбужденные в начальный момент моды, которым отвечают различные значения модуля волнового вектора k , распространяются с соответствующими групповыми скоростями $C(k)$ [5]. В момент времени t каждая конкретная мода будет находиться на расстоянии $r=C(k)t$ от места действия источника. Следовательно, $k=k(r, t)$ удовлетворяет соотношению

$$C(k) = r/t. \quad (5)$$

Приравнивая правые части (5) и (4), получим следующее уравнение для $k(r, t)$:

$$k(1 + \sigma k \rho^{-1})^3 = \frac{gt^2}{4r^2}, \quad (6)$$

являющееся алгебраическим уравнением четвертой степени, из анализа (6) заключаем, что всегда имеется один положительный корень $k(r, t)$, подставляя который в (3), можно определить вид функции $\omega(r, t)$. Ограничимся рассмотрением физически интересного случая, когда поверхностная плотность флотирующего вещества σ довольно мала, так что для достаточно произвольных r и t

$$\frac{\sigma gt^2}{\rho r^2} \ll 1 \quad (7)$$

(случай больших σ менее интересен, так как при этом возникает необходимость учета внутренних процессов в слое флотирующего материала, который не может быть проведен в рамках рассматриваемой модели). В этом случае приближенное решение (6), которое можно искать в виде

$$k = k_0(1 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots), \quad k_0 \equiv \frac{gt^2}{4r^2}, \quad \varepsilon \equiv \sigma k_0 \rho^{-1},$$

определяется методом неопределенных коэффициентов с любой степенью точности. В частности, оказывается, что $A_1 = -3$ и тем самым

$$k(r, t) = k_0(1 - 3\sigma k_0 \rho^{-1} + \dots). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (3), получим с принятой точностью

$$\omega(r, t) = \frac{gt}{2r} \left(1 - \frac{gt^2 \sigma}{2\rho r^2} + \dots \right). \quad (9)$$

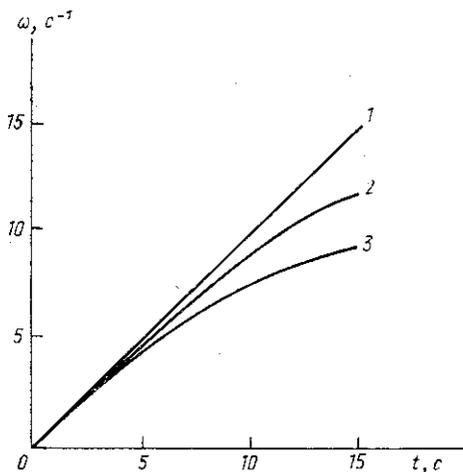


Рис. 1

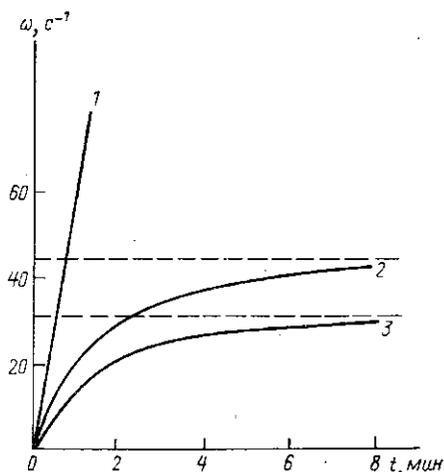


Рис. 2

Отметим, что в отсутствие флотации, т. е. при $\sigma=0$, формулы (8), (9) примут вид соответственно

$$k=k_0=\frac{gt^2}{2r^2}, \quad \omega=\frac{gt}{2r},$$

и тем самым при каждом фиксированном r частота моды, находящейся в данный момент t на этом расстоянии, линейно зависит от времени (см. также [5]). На этом явлении основан, в частности, способ экспериментального определения расстояний до источников волнения (например, штормов) в океане, дающий неплохие результаты [6]. При наличии же флотации даже с небольшой плотностью флотирующего материала, как видно из (8), частота волн в фиксированной точке будет меняться со временем существенно нелинейно. Графики $\omega(t)$ при $\rho=1000 \text{ кг/см}^3$, $r=5 \text{ м}$ и $\sigma=0$ (1); 5 (2) и 10 кг/см^2 (3) приведены на рис. 1, 2, причем рис. 1 охватывает интервал значений t , удовлетворяющих условию (7) (частота $\omega(t)$ при этом определялась по формуле (9)), а рис. 2 — более широкий интервал ($\omega(t)$ при этом выражается из (3), где k — вычисленный корень (6)). Было бы интересно провести экспериментальную проверку отмеченного эффекта, на основании которой можно было бы судить о том, насколько хорошо предложенная в [1] модель флотирующей жидкости соответствует реальной физической действительности.

Автор благодарен проф. А. Г. Свешникову за ряд ценных замечаний и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Габов С. А. // Дифф. уравнения. 1988. 24, № 1. С. 16. [2] Габов С. А. // ЖВМ и МФ. 1988. 28, № 10. С. 1507. [3] Габов С. А., Тверской М. Б. // Матем. моделирование. 1989. 1, № 2. С. 109. [4] Габов С. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. 30, № 2. С. 9. [5] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. [6] Snodgrass F. E. et al. // Phil. Trans. Roy. Soc. 1966. A259. P. 431.

Поступила в редакцию
15.12.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

УДК 539.129

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ФЕРМИОНОВ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ ААРОНОВА—БОМА

Д. В. Гальцов, С. А. Воропаев, Д. А. Спасов

(кафедра теоретической физики)

Построено самосопряженное расширение дираковского гамильтониана для фермиона, движущегося в фоновом поле Ааронова—Бома. Рассмотрена проблема связанных состояний и получены выражения для уровней энергии частицы.

Для проявления эффекта Ааронова—Бома в случае нерелятивистских бесспиновых частиц необходимо, чтобы волновая функция квантовой частицы равнялась нулю или была ничтожно малой в области существования напряженностей E и H электромагнитного поля [1]. Это положение требует серьезного критического рассмотрения при анализе движения релятивистских частиц со спином $1/2$ в окрестности бесконечно тонкого и длинного соленоида, содержащего постоянный магнитный поток $\Phi = \text{const}$. Дираковский гамильтониан в данном случае, определенный только для регулярных в области источника функций, будет не самосопряженным оператором и для устранения несамосопряженности необходимо ввести сингулярную гармонику [2].

Целью настоящей работы является изучение физических следствий нетривиальной структуры гамильтониана для фермиона, движущегося в фоновом поле Ааронова—Бома. Для этого удобнее всего воспользоваться цилиндрической системой координат (ρ, φ, z) , ось Oz которой совпадает с осью соленоида и направлением вектора напря-