Отметим, что в отсутствие флотации, т. е. при $\sigma=0$, формулы (8), (9) примут вид соответственно

$$k=k_0=\frac{gt^2}{2r^2},\quad \omega=\frac{gt}{2r},$$

и тем самым при каждом фиксированном r частота моды, находящейся в данный момент t на этом расстоянии, линейно зависит от времени (см. также [5]). На этом явлении основан, в частности, способ экспериментального определения расстояний до источников волнения (например, штормов) в океане, дающий неплохие результаты [6]. При наличии же флотации даже с небольшой плотностью флотирующего материала, как видно из (8), частота волн в фиксированной точке будет меняться со временем существенно нелинейно. Графики $\omega(t)$ при $\rho=1000$ кг/см^3, $r=5$ м и $\sigma=0$ (*1*); 5 (*2*) и 10 кг/см^2 (*3*) приведены на рис. 1, 2, причем рис. 1 охватывает интервал значений t, удовлетворяющих условию (7) (частота $\omega(t)$ при этом определялась по формуле (9)), а рис. 2 — более широкий интервал ($\omega(t)$ при этом выражается из (3), где k — вычисленный корень (6)). Было бы интересно провести экспериментальную проверку отмеченного эффекта, на основании которой можно было бы судить о том, насколько хорошо предложенная в [1] модель флотирующей жидкости соответствует реальной физической действительности.

Автор благодарен проф. А. Г. Свешникову за ряд ценных замечаний и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Габов С. А.//Дифф. уравнения. 1988. **24**, № 1. С. 16. [2] Габов С. А.//ЖВМ и МФ. 1988. **28**, № 10. С. 1507. [3] Габов С. А., Тверской М. Б.//Матем. моделирование. 1989. **1**, № 2. С. 109. [4] Габов С. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. **30**, № 2. С. 9. [5] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. [6] Snodgrass F. E. et al.//Phil. Trans. Roy. Soc. 1966. **A259**. P. 431.

Поступила в редакцию
15.12.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

УДК 539.129

ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ФЕРМИОНОВ В КАЛИБРОВОЧНОМ ПОЛЕ ААРОНОВА—БОМА

Д. В. Гальцов, С. А. Воропаев, Д. А. Спасов

(кафедра теоретической физики)

Построено самосопряженное расширение дираковского гамильтониана для фермиона, движущегося в фоновом поле Ааронова—Бома. Рассмотрена проблема связанных состояний и получены выражения для уровней энергии частицы.

Для проявления эффекта Ааронова—Бома в случае нерелятивистских бесспиновых частиц необходимо, чтобы волновая функция квантовой частицы равнялась нулю или была ничтожно малой в области существования напряженностей **E** и **H** электромагнитного поля [1]. Это положение требует серьезного критического рассмотрения при анализе движения релятивистских частиц со спином 1/2 в окрестности бесконечно тонкого и длинного соленоида, содержащего постоянный магнитный поток $\Phi=\mathrm{const}$. Дираковский гамильтониан в данном случае, определенный только для регулярных в области источника функций, будет не самосопряженным оператором и для устранения несамосопряженности необходимо ввести сингулярную гармонику [2].

Целью настоящей работы является изучение физических следствий нетривиальной структуры гамильтониана для фермиона, движущегося в фоновом поле Ааронова—Бома. Для этого удобнее всего воспользоваться цилиндрической системой координат (ρ, φ, z), ось $0z$ которой совпадает с осью соленоида и направлением вектора напря-

женности магнитного поля **H** внутри него. Тогда вектор-потенциал внешнего поля определяется выражением

$$\mathbf{A}=\mathbf{e}_\varphi A_\varphi(\rho), \text{ где } A_\varphi(\rho)=\frac{\Phi}{2\pi}\frac{1}{\rho}.$$

Решение уравнения Дирака [3]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},\ t)=\widehat{H}_D\Psi(\mathbf{r},\ t), \tag{1}$$

где $\widehat{H}_D=c(\mathbf{d}\widehat{\mathbf{P}})+\rho_3Mc^2$, $\widehat{\mathbf{P}}=-i\hbar\widehat{\nabla}-(e/c)\mathbf{A}$, можно представить в виде

$$\Psi(\mathbf{r},\ t)=\exp\left\{-i\frac{E}{\hbar}t\right\}C_N\exp\{iK_3z\}\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m\exp\{im\varphi\}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}R_1^{(m)}(\rho)\cdot\exp\{-i\varphi\}\\ R_2^{(m)}(\rho)\cdot i\\ R_3^{(m)}(\rho)\cdot\exp\{-i\varphi\}\\ R_4^{(m)}(\rho)\cdot i\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Если энергия частицы E удовлетворяет условию

$$K^2\leqslant K_0^2+K_3^2,$$

где $K=E/(c\hbar)$, $K_0=Mc^2/(c\hbar)$, K_3 — z-компонента волнового вектора, то мы имеем случай связанных состояний. Рассмотрим его подробнее.

Радиальные функции $R_j^{(m)}(\rho)$, $j=\overline{1,\ 4}$, будут иметь вид

$$R_j^{(m)}(\rho)=C_jK_\nu(k\rho),$$

где

$$\nu=\begin{cases}\widetilde{m}-1; & j=1,\ 3\\ \widetilde{m}; & j=2,\ 4\end{cases},\quad \widetilde{m}=m+f,\quad f=\frac{\Phi}{\Phi_0}\quad\text{и}\quad \Phi_0=-\frac{2\pi\hbar c}{e}$$

— квант магнитного потока, $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя от мнимого аргумента. Условие квадратичной интегрируемости волновой функции оставляет в (2) только одну гармонику: $0<\widetilde{m}<1$ [4], причем для существования связанных состояний необходимо, чтобы

$$0<\Phi<\Phi_0.$$

Рассмотрим $\widehat{H}_D$ как оператор в гильбертовом пространстве квадратично-интегрируемых функций. Пусть $\widehat{H}_D{}^*$ — сопряженный гамильтониану оператор. Тогда если $D(\widehat{H})$ — область определения $\widehat{H}_D$ и $D(\widehat{H}^*)$ — область определения $\widehat{H}_D{}^*$, то для того чтобы $\widehat{H}_D$ был самосопряженным оператором, необходимо выполнение следующих условий [5]:

1) $\int d\mathbf{r}\,\chi^*(\mathbf{r})[\widehat{H}_D\Psi(\mathbf{r})]=\int d\mathbf{r}\,[\widehat{H}_D\chi(\mathbf{r})]^*\Psi(\mathbf{r}),$

где $\Psi(\mathbf{r})\in D(\widehat{H})$, $\chi(\mathbf{r})\in D(\widehat{H}^*)$. (3)

2) $D(\widehat{H})=D(\widehat{H}^*)$,

т. е. области определения $\widehat{H}_D$ и $\widehat{H}_D{}^*$ эквивалентны, что подразумевает, в частности, одинаковое поведение волновой функции в окрестности $\rho=0$.

Непосредственным вычислением легко показать, что условие самосопряженности $\widehat{H}_D$ (3) выполняется при следующих значениях C_j', $k' \in D(\widehat{H}^*)$ и C_j, $k \in D(\widehat{H})$:

$$[C_1'C_4 + C_3'C_2](k')^{-\bar{\delta}}(k)^{-\delta} = [C_2'C_3 + C_4'C_1](k')^{-\delta}(k)^{-\bar{\delta}}, \tag{4}$$

где $\bar{\delta} = 1 - \delta$ (δ — дробная часть f). Возможны только два вида связей C_j и k, являющихся решением (4) и сохраняющих эквивалентность $D(\widehat{H})$ и $D(\widehat{H}^*)$:

$$\begin{aligned} &\text{I.}\ \left(\frac{k}{K_0}\right)^{\bar{\delta}-\delta} = \frac{C_3}{C_4} = \frac{C_1}{C_2}; \\ &\text{II.}\ \left(\frac{k}{K_0}\right)^{\bar{\delta}-\delta} = \frac{C_1}{C_4} = \frac{C_3}{C_2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Сопоставление (5) и уравнения Дирака (1) дает нам конкретное выражение для уровней энергии E и спинора частицы.

$$\text{I. } a)\ \delta \neq \frac{1}{2} : E \Leftarrow \left(\frac{K_3 - t}{K_0}\right)^{1-\delta} = \left(\frac{K_3 + t}{K_0}\right)^{\delta},$$

где $t = \sqrt{K^2 - K_0^2}$; $K > K_0$, $K_3 \geqslant K_0/2$.

$$б)\ \delta = \frac{1}{2} : K = K_0,\ K_3 = k.$$

Данный вид связанных состояний существует только при $K_3 \neq 0$ и имеет в качестве классического аналога спиральное движение частицы вдоль оси $0z$.

$$\text{II. } E \Leftarrow \left(\frac{A - K}{K_0}\right)^{1-\delta} = \left(\frac{A + K}{K_0}\right)^{\delta}, \quad \text{где } A = \sqrt{K_0^2 + K_3^2}$$

и K_3 может принимать произвольные значения, в том числе и $K_3 = 0$. В свою очередь данный вид связанных состояний имеет аналогию с классическим случаем движения частицы по окружности в окрестности точки $\rho = 0$.

Можно показать, что рассмотренные выше связанные состояния не исчезнут, если окружить соленоид бесконечно высоким потенциальным барьером, радиус которого также стремится к нулю. Мы не можем, следовательно, объяснить их существование взаимодействием спина частицы и магнитного поля **H** соленоида. В данном случае рассмотренные выше особенности структуры дираковского гамильтониана обеспечивают своеобразное нелокальное взаимодействие спина и калибровочного поля посредством механизма Ааронова—Бома.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Aharonov Y., Bohm D.//Phys. Rev. 1959. **115**. P. 485. [2] Ph. de Sousa Gerbert. MIT preprint: CTP 1653. 1988. [3] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., 1983. [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., 1973. Т. 2. [5] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1978. Т. 2.

Поступила в редакцию
16.02.90