УДК 530.12

НОВЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ ГЕОМЕТРИИ ШВАРЦШИЛЬДА

А. Н. Петров

(ГАИШ)

Найдены новые гармонические координаты для геометрии Шварцшильда, исследована метрика. В отличие от случая использования гармонических координат Фока в новых координатах падающие в черную дыру частицы достигают горизонта событий при конечном значении временного параметра.

В общей теории относительности с целью упрощения уравнений часто прибегают к определенному выбору координат. Очень большой популярностью пользовались и пользуются гармонические координаты. Особенно много внимания гармоническим координатам уделял Фок [1]. Сейчас с их помощью исследуются различные теоретические вопросы (см., напр., [2, 3]). С использованием гармонических координат разработан аппроксимационный метод, благодаря которому получено детальное представление о структуре гравитационного поля вне изолированной системы [4]. Гармонические координаты плодотворно используются при построении релятивистской теории систем отсчета для тел Солнечной системы [5].

Для описания геометрии Шварцшильда часто используются гармонические координаты Фока [1]. Однако они, как и координаты Шварцшильда [6, 7], сингулярны на горизонте: даже при бесконечном значении временного параметра t падающая частица не достигнет горизонта событий. Известны многие координатные системы без этой особенности, например системы Леметра, Эдингтона—Финкельштейна, Крускала—Шекереса, Новикова [6, 7]. Упоминаний о гармонических координатах, которые в окрестности горизонта были бы так же хороши, как только что перечисленные, нам до сих пор не встречалось*. Здесь мы предлагаем такие координаты, описываем их свойства. В отличие от случая использования координат Фока в новых гармонических координатах падающая частица при конечном значении t достигает горизонта событий и уходит под него.

Итак, запишем метрику для геометрии Шварцшильда в новых координатах:

$$ds^2=\left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right)c^2\,dt^2-\frac{8\alpha^2}{(r+\alpha)^2}\,dt\,dr-\left(1+\frac{2\alpha}{r+\alpha}+\left(\frac{2\alpha}{r+\alpha}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\alpha}{r+\alpha}\right)^3\right)dr^2-(r+\alpha)^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2), \qquad (1)$$

где $\alpha\equiv GM/c^2$. После преобразований

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta \qquad (2)$$

метрика (1) удовлетворяет условиям гармоничности $(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})_{,\nu}=0$, где $g\equiv\det g_{\mu\nu}$. Структура световых конусов для (1)

$$\left.\frac{cdt}{dr}\right|_1=\frac{(r+\alpha)^2+(2\alpha)^2}{r^2-\alpha^2},\quad \left.\frac{cdt}{dr}\right|_2=-\frac{r+3\alpha}{r+\alpha} \qquad (3)$$

ясно указывает, что падающая в черную дыру частица может достичь горизонта событий $r=\alpha$ при конечном значении координаты t. Анализ геодезических подтверждает это. Для примера выпишем уравнение траектории пробной частицы, начинающей движение от состояния покоя при $r=\infty$:

$$c\,dt=-2\alpha\left[\frac{2}{3}\left(\frac{r+\alpha}{2\alpha}\right)^{3/2}+2\left(\frac{r+\alpha}{2\alpha}\right)^{1/2}+\ln\left|\frac{r}{\alpha}+1\right|-\right.$$
$$\left.-2\ln\left|\left(\frac{r+\alpha}{2\alpha}\right)^{1/2}+1\right|\right]+\text{const}.$$

* О поиске гармонических координат для геометрии Шварцшильда и некоторых из них см., напр., [8, 9].

Как видно, линию геодезической на координатной диаграмме (t, r) можно непрерывно продолжить за горизонт. Истинной сингулярности $r=-\alpha$ частица достигает лишь при $t=\infty$. Метрические коэффициенты $g_{\mu\nu}$ (1) регулярны при $r=\alpha$ и обращаются в бесконечность при $r=-\alpha$; $g=-(r+\alpha)^4\sin^2\theta$.

Из формул (3) и вида метрики (1) следует, что при $r<\alpha$ обе координаты r и t пространственноподобны. И это допустимо, поскольку при $r<\alpha$ сигнатура метрики, как мы видели, не нарушена (аналогия с решением Финкельштейна [10]). Таким образом, сечения $t=\text{const}$ пространственноподобны везде при $r>-\alpha$. В смысле принадлежности некоторых событий одной и той же пространственноподобной поверхности $t=\text{const}$ можно говорить об их одновременности вне горизонта, на нем и под ним. Это может быть полезным при исследованиях с помощью процедуры (3+1)-расщепления пространства-времени (см. [6]).

При $r>\alpha$, как и должно быть, решение (1) описывает статическое пространство. (Это следует из того, что $\omega^\alpha=0$, где ω^α — дифференциальный инвариант, связанный с времениподобным векторным полем Киллинга [7].) Саму метрику (1) из-за появления перекрестного tr-члена можно назвать лишь стационарной при $r>\alpha$.

При $-\alpha\leqslant r\leqslant\alpha$ любым двум точкам 1 и 2, для которых $r_2=-r_1$, $\theta_2=\pi-\theta_1$, $\varphi_2=\pi+\varphi_1$, соответствует одна и та же точка x, y, z (см. формулу (2)). То есть гармонические координаты находятся в одно-однозначном соответствии не со всеми точками физического пространства-времени решения (1) *. Однако, исключая из рассмотрения область $-\alpha\leqslant r<0$, мы получим гармонические координаты без этого изъяна. Для исследования траекторий частиц в области горизонта вполне достаточно оставшейся части пространства-времени.

Выпишем преобразование координат метрики (1) в координаты Фока [1] t', r', θ', φ', которые становятся гармоническими после использования формул, аналогичных (2):

$$ct'=ct-2\alpha\ln\left|\frac{r-\alpha}{r+\alpha}\right|,\quad r'=r,\ \theta'=\theta,\ \varphi'=\varphi. \tag{4}$$

(Общий вид уравнений для координатных преобразований, сохраняющих условия гармоничности, дан в книге [1].) Существование этих двух гармонических систем координат для геометрии Шварцшильда не противоречит известной теореме Фока о единственности гармонических координат для изолированной системы [1]. Легко обнаружить, что каждое из этих решений не удовлетворяет сразу всем ее условиям во всем физическом пространстве-времени. Особенность при $r=\alpha$ в преобразованиях (4) приводит к той особенности для координат Фока, которая обсуждалась выше. Связь новых координат с множеством других [6, 7] может быть установлена с помощью (4). Отметим лишь, что координаты (1) описывают только половину геометрии Шварцшильда подобно сжимающимся координатам Леметра. Координаты (1) также можно назвать сжимающимися. Изменив знак перед логарифмом в (4), получим связь координат Фока с новыми расширяющимися гармоническими координатами без особенности на горизонте. Такие координаты полезны для описания частиц, выбрасываемых из-под горизонта.

В заключение отметим, что анализ островных систем на основе фоковских координат, где пробная частица в координатном времени бесконечно долго приближается к горизонту, может создать представление о невозможности черных дыр. К такому выводу приходят авторы РТГ (см., напр., [11]), придавая особое значение гармоническим условиям и плоскому фоновому миру. Новое же решение, где частица беспрепятственно проникает под горизонт, показывает, что на самом деле уравнения Эйнштейна, дополненные гармоническими условиями (а также структурой плоского фонового мира, см. [12]), не исключают черных дыр.

Автор выражает благодарность Л. П. Грищуку за многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1965. [2] Ruiz E.//Gen. Relat. and Grav. 1986. 18, N 8. P. 805. [3] Nakanishi N.//Progr. Theor. Phys. 1986. 75, N 6. P. 1351. [4] Blanshet L., Damaour T.//Fil. Trans. Roy. Soc. (L.). 1986. A320, N 3. P. 379. [5] Kopeykin S. M.//Celest. Mech. 1988. 44, N 1. P. 87. [6] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., 1977. [7] Новиков И. Д., Фролов В. П. Физика черных дыр. М., 1986. [8] Belinfante F. J., Garrison J. C.//Phys. Rev. 1962. 125, N 3. P. 1142. [9] Asanov R. A.//Gen. Relat. and

* О гармонических координатах с этим недостатком вне горизонта событий см. [8].

Grav. 1989. 21, N 2. P. 149. [10] Finkelstein D.//Phys. Rev. 1958. 110, N 4. P. 965. [11] Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1986. [12] Петров А. Н. Деп. ВИНИТИ № 1851-В90 от 04.04.90.

Поступила в редакцию
22.02.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

РАДИОФИЗИКА

УДК 538.574

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД БЕГУЩИХ ВОЛН

В. Д. Гусев, С. М. Голынский

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Работа посвящена уточнению границ применимости геометрического подхода (квазиклассического ВКБ-приближения) при описании статистических характеристик электромагнитного излучения, распространяющегося в плоскослоистой случайно-неоднородной среде. Показано, что метод геометрической оптики является предельным случаем модифицированного метода бегущих волн. На основании сравнения решений обоих методов для одномерной задачи получены условия, определяющие область применимости приближения геометрической оптики.

Рассмотрим простейший случай распространения излучения в одномерной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)=1+\varepsilon_1(z)$, где $\varepsilon_1(z)$ — флуктуационная составляющая, причем $\langle\varepsilon_1\rangle=0$. Пусть среда заполняет полупространство $z\geqslant 0$, на которое слева по нормали падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды. Волновое поле внутри среды описывается уравнением Гельмгольца

$$E''(z)+k^2\varepsilon(z)E(z)=0 \tag{1}$$

с соответствующими условиями непрерывности для E и E' на границе. Здесь $k=2\pi/\lambda$, λ — длина волны падающего излучения, штрих означает дифференцирование по переменной z.

В первом приближении метода геометрической оптики для волнового поля внутри среды справедливо представление [1, 2]

$$E_{1,2}(z)=C_{1,2}\varepsilon^{-1/4}(z)\exp\left\{\pm ik\int_0^z\varepsilon^{1/2}(z_1)\,dz_1\right\}, \tag{2}$$

где $C_{1,2}$ — константы интегрирования. Выражение (2) получено в предположении о медленности изменений свойств среды на длине волны, т. е. при выполнении априорного условия

$$kl\gg 1, \tag{3}$$

где $l\sim(\varepsilon')^{-1}$ — характерный масштаб неоднородностей среды в направлении оси z.

В модифицированном методе бегущих волн два точных независимых решения уравнения (1) записываются в виде бегущих волн [2, 3], распространяющихся в противоположных направлениях:

$$E_{1,2}(z)=C_{1,2}p^{-1/2}(z)\exp\left\{\pm ik\int_0^z p(z_1)\,dz_1\right\}, \tag{4}$$

где $p(z)=\varphi'(z)$ — производная эйконала каждой из волн. Подставляя формальное решение (4) в уравнение (1), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению, определяющему неизвестную функцию $p(z)$:

$$2pp''-3(p')^2+4k^2p^4-4k^2\varepsilon p^2=0. \tag{5}$$