Grav. 1989. **21**, N 2. P. 149. [10] Finkelstein D.//Phys. Rev. 1958. **110**, N. 4. P. 965. [11] Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1986. [12] Петров А. Н. Деп. ВИНИТИ № 1851-В90 от 04.04.90.

Поступила в редакцию
22.02.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 5

РАДИОФИЗИКА

УДК 538.574

ПРИБЛИЖЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД БЕГУЩИХ ВОЛН

В. Д. Гусев, С. М. Голынский

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Работа посвящена уточнению границ применимости геометрического подхода (квазиклассического ВКБ-приближения) при описании статистических характеристик электромагнитного излучения, распространяющегося в плоскослоистой случайно-неоднородной среде. Показано, что метод геометрической оптики является предельным случаем модифицированного метода бегущих волн. На основании сравнения решений обоих методов для одномерной задачи получены условия, определяющие область применимости приближения геометрической оптики.

Рассмотрим простейший случай распространения излучения в одномерной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(z)=1+\varepsilon_1(z)$, где $\varepsilon_1(z)$ — флуктуационная составляющая, причем $\langle\varepsilon_1\rangle=0$. Пусть среда заполняет полупространство $z\geqslant0$, на которое слева по нормали падает плоская монохроматическая волна единичной амплитуды. Волновое поле внутри среды описывается уравнением Гельмгольца

$$E''(z)+k^2\varepsilon(z)E(z)=0 \tag{1}$$

с соответствующими условиями непрерывности для E и E' на границе. Здесь $k=2\pi/\lambda$, λ — длина волны падающего излучения, штрих означает дифференцирование по переменной z.

В первом приближении метода геометрической оптики для волнового поля внутри среды справедливо представление [1, 2]

$$E_{1,2}(z)=C_{1,2}\varepsilon^{-1/4}(z)\exp\left\{\pm ik\int\limits_0^z \varepsilon^{1/2}(z_1)\,dz_1\right\}, \tag{2}$$

где $C_{1,2}$ — константы интегрирования. Выражение (2) получено в предположении о медленности изменений свойств среды на длине волны, т. е. при выполнении априорного условия

$$kl\gg1, \tag{3}$$

где $l\sim(\varepsilon')^{-1}$ — характерный масштаб неоднородностей среды в направлении оси z.

В модифицированном методе бегущих волн два точных независимых решения уравнения (1) записываются в виде бегущих волн [2, 3], распространяющихся в противоположных направлениях:

$$E_{1,2}(z)=C_{1,2}p^{-1/2}(z)\exp\left\{\pm ik\int\limits_0^z p(z_1)\,dz_1\right\}, \tag{4}$$

где $p(z)=\varphi'(z)$ — производная эйконала каждой из волн. Подставляя формальное решение (4) в уравнение (1), приходим к нелинейному дифференциальному уравнению, определяющему неизвестную функцию $p(z)$:

$$2pp''-3(p')^2+4k^2p^4-4k^2\varepsilon p^2=0. \tag{5}$$

В приближении геометрической оптики [1, 2], так же как и в его обобщенной форме — стандартном методе бегущих волн [4, 5], искомая функция $p(z)$ удовлетворяет уравнению эйконала и в соответствии с выражением (2) имеет вид

$$p^{go}(z)=\varepsilon^{1/2}(z)=[1+\varepsilon_1(z)]^{1/2}. \tag{6}$$

Представим решение уравнения (5) в виде

$$p(z)=p^{go}(z)\,f(z)=[1+\varepsilon_1(z)]^{1/2}f(z), \tag{7}$$

где вспомогательная функция $f(z)$, описывающая отклонение приближенного решения (6) метода геометрической оптики от точного решения уравнения (3), удовлетворяет уравнению

$$2ff''-3(f')^2-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}ff'+4k^2\varepsilon f^4-\left[4k^2\varepsilon+\frac{5}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2-\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right]f^2=0 \tag{8}$$

и граничным условиям

$$f(z=0)=1, \quad f'(z=0)=0. \tag{9}$$

В невозмущенной среде ($\varepsilon=1$) уравнение (8) при учете граничных условий (9) имеет единственное решение: $f_0=1$. Принимая это во внимание, будем искать решение уравнения (8) для рассматриваемого случая в виде ряда по степеням параметра ν, характеризующего стандарт σ_ε флуктуаций диэлектрической проницаемости,

$$f(z)=1+\nu f_1(z)+\nu^2 f_2(z)+\ldots. \tag{10}$$

Подставляя ряд (10) в уравнение (8) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ν, приходим к системе уравнений для произвольных членов ряда $f_j(z)$ $(j=1, 2, \ldots)$:

$$f_j''+4k^2f_j=h_j, \quad f_j(z=0)=0, \quad f_j'(z=0)=0, \tag{11}$$

где

$$h_1=-\frac{\varepsilon_1''}{2}, \quad h_2=\frac{1}{2}\left\{(f_1^2)''+(f_1')^2-4k^2f_1^2+\varepsilon_1'f_1'+4k^2\varepsilon_1f_1+\varepsilon_1\varepsilon_1''+\frac{5}{4}(\varepsilon_1')^2\right\}$$

и т. д.

Для определения возможности пренебречь влиянием функции $f(z)$ в решении (7), т. е. фактически для оценки области применимости геометрооптического приближения (5), необходимо исследовать выражения типа $\langle f_1^2\rangle$, $\langle\varepsilon_1 f_1\rangle$, $\langle f_2\rangle$ и т. д. Для этого конкретизируем модель случайно-неоднородной среды. Полагаем, что $\varepsilon_1(z)$ — нормальный процесс с гауссовой функцией корреляции

$$\langle\varepsilon_1(z_1)\,\varepsilon_1(z_2)\rangle=\sigma_\varepsilon^2R(\zeta)=\sigma_\varepsilon^2\exp\{-\zeta^2/l^2\}, \quad \zeta=z_1-z_2. \tag{12}$$

При проведении расчетов предполагалось, что пройденный в среде волной путь L значительно превышает продольный масштаб неоднородностей l, т. е.

$$L\gg l. \tag{13}$$

Это условие позволяет сделать пределы интегрирования по ζ бесконечными. В результате для выражений, определяющих отклонение приближенного решения от точного на основании первого из уравнений системы (9), получим

$$\begin{gathered}\langle\varepsilon_1f_1\rangle\simeq-\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}\exp\{-k^2l^2\}\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ k^2l^2\right);\\
\langle f_1^2\rangle\simeq\frac{\sigma_\varepsilon^2}{4}\exp\{-k^2l^2\}\left\{2\sqrt{\pi}\,k^2lL\left[1-\frac{1}{4kL}\sin 4kL\right]-\right.\\
-\frac{1}{2}(kl)^{-2}\left[(1+\cos^2 2kL)\,{}_1F_1\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2};\ k^2l^2\right)-\right.\\
\left.\left.-2\,{}_1F_1\left(-\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2};\ k^2l^2\right)\right]\right\}.\end{gathered} \tag{14}$$

где ${}_1F_1(\alpha,\ \beta;\ x)$ — вырожденные гипергеометрические функции. Выражения для $\langle f_2\rangle$ и $\langle\delta f_2^2\rangle=\langle(f_2-\langle f_2\rangle)^2\rangle$, полученные из второго уравнения системы (9), здесь не приводим в силу их громоздкости. Из анализа этих формул и выражений (14) вытекает, что использование решения метода геометрической оптики (6), обеспечиваемое выполнением неравенств

$$\langle f_1^2\rangle \ll \sigma_\varepsilon^2/4,\ \ \langle\varepsilon_1 f_1\rangle \ll \sigma_\varepsilon^2/8,\ \ \langle f_2\rangle \ll \sigma_\varepsilon^2/8, \tag{15}$$

оказывается справедливым при следующих условиях:

$$(kl)^2 \gg 1;\ \ 1 \ll \frac{L}{l} \ll \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(kl)^{-2}\exp\{k^2l^2\}. \tag{16}$$

Аналогичные оценки были проведены для другой, также широко распространенной модели функции корреляции

$$R(\zeta)=\left(1+\frac{|\zeta|}{l}\right)\exp\left\{-\frac{|\zeta|}{l}\right\}. \tag{12$'$}$$

В этом случае соответствующие (15) условия, характеризующие область применимости геометрооптического приближения (6), при учете (13) имеют вид

$$(kl)^2 \gg 1;\ \ 1 \ll L/l \ll 4(kl)^4. \tag{16$'$}$$

Таким образом, условия (16) и (16)′, полученные для двух моделей функции корреляции флуктуационной составляющей диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon_1(z)$ (12) и (12′), задают границы применимости приближения геометрической оптики для каждой из моделей.

Условия (16) и (16′) существенно уточняют обычно используемое для рассматриваемой задачи априорное ограничение метода геометрической оптики (3). С одной стороны, замена условия (3) на более слабое $(kl)^2 \gg 1$ расширяет границы применимости метода. С другой стороны, сравнение геометрооптического решения (6) с точным решением задачи, определяемым уравнением (5), приводит к выводу о существовании ограничений на проходимые волной в среде расстояния L, на которых справедливо приближение геометрической оптики. Этот принципиальный результат является новым и должен учитываться при использовании метода геометрической оптики для решения практических задач распространения и рассеяния излучения в плоскослоистых случайно-неоднородных средах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., 1973. [2] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967. [3] Gans R.//Ann. Phys. 1915. 47. P. 709. [4] Avila G. S. S., Keller J. B.//Comm. Pure and Appl. Math. 1963. 16. P. 363. [5] Льюис Р.//Квазиоптика. М., 1966. С. 80.

Поступила в редакцию
23.01.90