УДК 517.9:535.3

О НЕЛИНЕЙНЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ТЕОРИИ ВОЛН. II. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН. АСИМПТОТИКА ДИССИПАТИВНЫХ УРАВНЕНИЙ

П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев

(кафедра математики)

Для системы уравнений поверхностных волн изучены задачи о локальном и глобальном во времени существовании решений, о разрушении решений за конечное время, о сглаживании со временем разрывных начальных возмущений, о построении обобщенных решений и об асимптотике решений при $t\to\infty$. Рассмотрено асимптотическое при $t\to\infty$ поведение решений нелинейных уравнений с диссипацией, таких как уравнение Колмогорова—Петровского—Пискунова, уравнение Уизема, кубическое уравнение Шрёдингера и уравнение Кортевега—де Фриза—Бюргерса.

Вторая часть обзора посвящена изучению системы уравнений поверхностных волн в жидкости и построению асимптотики при больших временах решений различных нелинейных нелокальных уравнений с диссипацией.

§ 1. Система уравнений поверхностных волн

В этом параграфе мы перенесем результаты, полученные в первой части обзора для нелинейного нелокального уравнения Уизема [1], на систему уравнений поверхностных волн (см. [2—4]).

1°. Законы сохранения

Рассмотрим систему уравнений поверхностных волн:

$$\begin{gathered}\eta_t+(\nabla,\ \eta\nabla\varphi)+\mathcal{K}_1(\eta)+\mathcal{K}_2(\varphi)=0,\\ \varphi_t+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\mathcal{K}_3(\eta)+\mathcal{K}_4(\varphi)=0.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь функция $\eta=\eta(x,t)$ — свободная поверхность несжимаемой жидкости, отсчитываемая от нулевого невозмущенного уровня, $\varphi(x,t)$ — потенциал скорости, $x\in R_2$, $t\geqslant0$, $\mathcal{K}_j$ — линейные псевдодифференциальные операторы, определяемые формулой

$$\mathcal{K}_j(\psi)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{i(p,\ x)\}\widehat{K}_j(p)\widehat{\psi}(p)\,dp,\quad j=1,\ldots,4,\tag{2}$$

$\widehat{\psi}(p)$ — преобразование Фурье функции $\psi(x)$, $x\in R_2$, $K_j(p)$ — символы операторов $\mathcal{K}_j(\psi)$.

Выпишем простейшие законы сохранения для решений системы (1).

1) Закон сохранения массы

$$I_1=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\eta(x,\ t)\,dx=\text{const}$$

справедлив, если

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_j(\psi)\,dx=0, \quad j=1,\ 2.$$

2) Закон сохранения импульса

$$I_2=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \eta\nabla\varphi\,dx=\mathrm{const}$$

имеет место, если выполнены условия (сопряжение в $L_2(R_2)$):

$$\mathcal{K}_1=-\mathcal{K}_4^*,\ \mathcal{K}_2=\mathcal{K}_2^*,\ \mathcal{K}_3=\mathcal{K}_3^*.$$

Этим требованиям удовлетворяют приведенные в [1] системы мелкой воды, Буссинеска и Доброхотова.

3) Закон сохранения энергии

$$I_3=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \{\eta(\nabla\varphi)^2-2\varphi\mathcal{K}_1(\eta)-\varphi\mathcal{K}_2(\varphi)+\eta\mathcal{K}_3(\eta)\}\,dx=\mathrm{const}$$

также выполняется при условиях $\mathcal{K}_1=-\mathcal{K}_4^*$, $\mathcal{K}_2=\mathcal{K}_2^*$ и $\mathcal{K}_3=\mathcal{K}_3^*$.

Закон сохранения энергии I_3 позволяет записать систему (1) в гамильтоновой форме с гамильтонианом $\mathscr{H}=-(1/2)I_3$:

$$\eta_t=-\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\varphi},\quad \varphi_t=\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta\eta}.$$

4) Движение центра масс. Если символы $R_1(p)$ и $R_2(p)$ имеют нуль второго порядка при $p=0$, то сохраняется интеграл:

$$I_4=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} (x\eta(x,\ t)-t\eta\nabla\varphi)\,dx=\mathrm{const}.$$

Отсюда следует уравнение для радиус-вектора центра масс $R=\iint\limits_{-\infty}^{\infty} x\eta(x,t)\,dx$:

$$\frac{dR}{dt}=I_2=\mathrm{const},$$

т. е. скорость движения центра масс постоянна, если интеграл I_2 сохраняется.

2°. Задача Коши для системы уравнений поверхностных волн в случае регулярного оператора

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений поверхностных волн:

$$\begin{aligned} &\eta_t+(\nabla,\ \eta u)+\mathcal{K}_1(\eta)+\mathcal{K}_2(u)=0,\\ &u_t+(u,\ \nabla)u+\mathcal{K}_3(\eta)+\mathcal{K}_4(u)=0, \qquad (3)\\ &\eta|_{t=0}=\bar{\eta}(x),\ u|_{t=0}=\bar{u}(x), \end{aligned}$$

где $u(x, t)$ — двумерный вектор, $x \in R_2$, $t \geqslant 0$, операторы $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4$ — матричные. Регулярным называется оператор $\mathcal{K}(\psi)$, который в x-представлении имеет вид свертки:

$$\mathcal{K}(\psi) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\,\psi(y)\,dy$$

для любой функции $\psi \in H^\infty(R_2)$, причем его ядро абсолютно интегрируемо на R_2, т. е. $k(x) \in L_1(R_2)$. В случае когда операторы $\mathcal{K}_j$ системы (3) регулярны, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *оператор* $\mathcal{K} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1, & \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_3, & \mathcal{K}_4 \end{pmatrix}$ *и оператор* $\nabla \mathcal{K}_3$ *регулярны;* 2) $(\bar{\eta}(x),\ \bar{u}(x)) \equiv \bar{v}(x) \in (H^\infty(R_2))^3$. *Тогда существует решение задачи Коши* (3) *из класса* $C^\infty([0, T_0);\ (H^\infty(R_2))^3)$. *Это решение может разрушиться только в результате опрокидывания (обращения в бесконечность первых производных решения).*

3°. Задача Коши для системы поверхностных волн с диссипативными или консервативными операторами

В этом пункте мы отказываемся от предположения о регулярности операторов $\mathcal{K}_j$.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\mathcal{K}$ *удовлетворяет условию диссипации*

$$\hat{K}_j(p) + \hat{K}_j^*(p) \geqslant 0, \quad |p| \geqslant p_0 > 0, \quad j = 1, 4 \tag{4}$$

и

$$|\hat{K}_2(p)| \leqslant c(1 + |p|), \quad |\hat{K}_3(p)(1 + |p|)| \leqslant c, \quad p \in R_2, \quad c > 0,$$

$$\bar{v}(x) \equiv (\bar{\eta}(x),\ \bar{u}(x)) \in (H^\infty(R_2))^3.$$

Тогда для некоторого $T > 0$ *существует единственное решение* $v(x, t) = (\eta(x, t),\ u(x, t))$ *задачи* (3) *из класса* $C^\infty([0, T];\ (H^\infty(R_2))^3)$ (звездочка у символа оператора означает эрмитово сопряжение).

Ввиду отмеченной в § 1 обзора [1] связи между системами (1) и (3) результат, аналогичный теореме 2, справедлив и для системы (1).

Теорема 3. *Пусть оператор* $\mathcal{K}$ *удовлетворяет условию диссипации* (4) *и*

$$|\hat{K}_2(p)| \leqslant c(1 + |p|)^2, \quad |\hat{K}_3(p)(1 + |p|)^2| \leqslant c, \quad p \in R_2, \quad c > 0,$$

$$\bar{w}(x) \equiv (\bar{\eta}(x),\ \bar{\varphi}(x)) \in (H^\infty(R_2))^2.$$

Тогда для некоторого $T > 0$ *существует единственное решение* $w(x, t) = (\eta(x, t)\ \varphi(x, t))$ *задачи Коши для системы уравнений* (1) *из класса* $C^\infty([0, T];\ (H^\infty(R_2))^2)$.

Теоремы 2 и 3 гарантируют локальное во времени существование решения соответствующей задачи Коши. Они не позволяют сделать какие-либо заключения о поведении решений при больших временах: будут ли они разрушаться или будут существовать для всех $t > 0$. Ответы на эти вопросы даны в следующих двух пунктах.

4°. Разрушение волн

Рассмотрим задачу Коши для системы уравнений поверхностных волн

$$\eta_t+(\nabla,\ \eta\nabla\varphi)+\mathscr{K}_1(\eta)+\mathscr{K}_2(\nabla\varphi)=0,$$
$$\varphi_t+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\mathscr{K}_3(\eta)+\mathscr{K}_4(\nabla\varphi)=0, \qquad (5)$$
$$\eta|_{t=0}=\bar{\eta}(x),\ \varphi|_{t=0}=\bar{\varphi}(x).$$

Для задачи (5) справедлива теорема (подробности см. в [2]), аналогичная теореме 2 из работы [1] для уравнения Уизема, в которой утверждается, что достаточно крутая и уплощенная в начальный момент волна неизбежно разрушается за конечное время T_0, причем для времени разрушения T_0 установлена весьма точная двусторонняя оценка.

5°. Существование в целом решений задачи Коши

В этом пункте указаны условия, при которых решение задачи Коши (3) существует для всех моментов времени, а именно справедлива

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*:

1) $\widehat{K}_j(p)+\widehat{K}_j^*(p)\geqslant\varepsilon>0,\ p\in R_2,\quad j=1,\ 4$ — *условие диссипации, и*

$|\widehat{K}_2(p)|\leqslant c(1+|p|),\ |\widehat{K}_3(p)(1+|p|)|\leqslant c,\quad p\in R_2,\quad c\geqslant 0;$

2) $\bar{v}(x)=(\bar{\eta}(x),\ \bar{u}(x))\in(H^{\infty}(R_2))^3,$

3) $\|\bar{v}\|_{H^s(R_2)}\leqslant\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1=\varepsilon_1(c,\ \varepsilon).$

Тогда решение $v(x,t)$ задачи Коши (3) *существует, единственно и принадлежит $C^\infty([0,\infty);\ (H^\infty(R_2))^3)$, т. е. существует в целом.*

Сопоставление этой теоремы с теоремой 2 показывает, что сколь угодно малая диссипация в сочетании с достаточной малостью начального возмущения обеспечивает существование решения для всех моментов времени.

6°. Сглаживание разрывных начальных возмущений

Здесь рассматривается задача Коши для системы уравнений поверхностных волн (3) и (5) с негладкими начальными возмущениями, и показано, что если оператор $\mathscr{K}$ сильно диссипативный, то решение задачи Коши в любой момент времени $t>0$ является бесконечно дифференцируемым по x и t.

Рассмотрим задачу Коши (3) для системы уравнений поверхностных волн. Запишем эту систему в векторной форме:

$$v_t+A(v)+B(v)+K(v)=0,\ v|_{t=0}=\bar{v}(x), \qquad (6)$$

где

$$K(v)=\begin{pmatrix}K_1 & K_2\\ K_3 & K_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\\ u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_1 & K_2^1 & K_2^2\\ K_3^1 & K_4^{11} & K_4^{12}\\ K_3^2 & K_4^{21} & K_4^{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix},$$

$$A(v)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}(v_i v_j), \quad B(v)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{3} b_{ij}^k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_j,$$

a_{ij}^k, b_{ij}^k — набор постоянных трехмерных векторов, равных

$$a_{21}^1=a_{13}^2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ a_{22}^1=\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix},\ a_{33}^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix},\ b_{32}^1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ b_{23}^2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

остальные a_{ij}^k, b_{ij}^k равны нулю, $k=1, 2$; $i, j=1, 2, 3$.

Рассмотрим также задачу Коши для системы линейных уравнений

$$\psi_t(p, t)+\widehat{K}(p)\psi(p, t)=0, \quad \psi(p, t)|_{t=0}=\overline{\psi}(p), \tag{7}$$

где $\widehat{K}(p)$ — символ оператора $\mathscr{K}$, $p\in R_2$ — параметр.

Обозначим через $R(p, t)\equiv\exp\{-K(p)t\}$ фундаментальную матрицу линейной задачи Коши (7) для системы обыкновенных уравнений, а через $\|A\|_0$ — норму линейного оператора $A: R_3\to R_3$.

Пусть выполнено следующее условие диссипативности оператора $\mathscr{K}$:

$$\|R(p, t)\|_0\leqslant c\exp\{-\varkappa(p)\, t\}, \tag{8}$$

где

$$c\geqslant 1, \ \varkappa(p)=\begin{cases} \varepsilon|p|^\alpha & \text{при } |p|\geqslant p_0\geqslant 1, \ \alpha>2, \ \varepsilon>0, \\ -c_0 & \text{при } |p|\leqslant p_0, \ c_0\geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть оператор $\mathscr{K}$ удовлетворяет условию* (8), *а начальное возмущение $\bar{v}(x)\in(H^{1/2}(R_2))^3$. Тогда найдется $T_0>0$ такое, что существует единственное решение задачи Коши* (6) *из класса $C^\infty((0, T_0]; (H^\infty(R_2))^3)\cap C^0([0, T_0]; (H^{1/2}(R_2))^3)$.*

Таким образом, негладкое (разрывное) начальное возмущение в любой момент $t>0$ становится бесконечно дифференцируемым.

Замечание. Достаточным условием для оценки (8) является требование $\lambda_0(p)\leqslant-(3/2)\varkappa(p)$, где $\lambda_0(p)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\operatorname{Re}\lambda_j(p)$, λ_j — характеристические корни матрицы $-\widehat{K}(p)$.

Если несколько усилить требование (8) диссипативности оператора $\mathscr{K}$, взяв в качестве $\varkappa(p)$ функцию

$$\varkappa(p)=\varepsilon(1+|p|)^\alpha, \quad p\in R_2, \quad \alpha>2, \quad \varepsilon>0, \tag{9}$$

то решение задачи Коши (6) с негладким начальным возмущением существует в целом. Справедлива

Теорема 6. *Пусть оператор $\mathscr{K}$ удовлетворяет условию* (8) *с $\varkappa(p)$ из* (9), *а $\bar{v}(x)\in(H^{1/2}(R_2))^3$ и норма $\|\bar{v}\|_{H^{1/2}}$ достаточно мала. Тогда существует единственное решение задачи Коши* (6) *из класса*

$$C^\infty((0, \infty); (H^\infty(R_2))^3)\cap C^0([0, \infty); (H^{1/2}(R_2))^3).$$

Для системы уравнений поверхностных волн (3) в случае, когда можно ввести потенциал скорости $u=\nabla\varphi$, теоремы 5 и 6 могут быть усилены в том смысле, что начальное возмущение можно взять, как и для уравнения Уизема, из класса L_2. В этом случае система (3) в обозначениях (6) записывается следующим образом: оператор B тождественно равен нулю, а векторы, задающие оператор A, равны

$$a_{12}^1=a_{13}^2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad a_{22}^1=a_{33}^1=\begin{pmatrix}0\\1/2\\0\end{pmatrix},\quad a_{22}^2=a_{33}^2=\begin{pmatrix}0\\0\\1/2\end{pmatrix}, \tag{10}$$

остальные a_{ij}^k равны нулю.

Теорема 7. *Пусть оператор $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию* (8), *а начальное возмущение $\bar{v}(x)\in(L_2(R_2))^3$. Тогда найдется $T_0>0$ такое, что существует единственное решение задачи Коши* (6) *из класса $C^\infty((0,T_0];(H^\infty(R_2))^3)\cap C^0([0,T_0];L_2(R_2))^3)$.*

Теорема 8. *Пусть оператор $\mathcal{K}$ удовлетворяет условию* (8) *с $\varkappa(p)$ из* (9), *а $\bar{v}(x)\in(L_2(R_2))^3$ и норма $\|\bar{v}\|_{L_2}$ достаточно мала. Тогда существует единственное решение задачи Коши* (6) *из класса*

$$C^\infty((0,\infty);(H^\infty(R_2))^3)\cap C^0([0,\infty);(L_2(R_2))^3).$$

7°. Обобщенное решение для системы поверхностных волн

Опираясь на законы сохранения энергии, можно установить существование обобщенного решения для системы уравнений поверхностных волн.

Обобщенным решением для системы (1) назовем пару $\eta(x,t)$, $\varphi(x,t)$ такую, что $\eta(x,t)\in L_\infty([0,T];H^{\alpha_3/2}(R_2))$, $\varphi(x,t)\in L_\infty([0,T];H^{\alpha_2/2}(R_2))$, и почти при всех $t\in[0,T]$ для любой финитной функции $\psi(x)\in C_0^\infty(R_2)$ выполнены равенства

$$(\eta_t,\psi)+((\nabla,\eta\nabla\varphi),\psi)+(\mathcal{K}_1(\eta),\psi)+(\mathcal{K}_2(\varphi),\psi)=0,$$
$$(\varphi_t,\psi)+\frac{1}{2}((\nabla\varphi)^2,\psi)+(\mathcal{K}_3(\eta),\psi)+(\mathcal{K}_4(\varphi),\psi)=0, \tag{11}$$
$$\varphi|_{t=0}=\bar{\varphi}(x),\quad \eta|_{t=0}=\bar{\eta}(x),$$

где $(\cdot,\psi)$ означает скалярное произведение в L_2. При этом мы предполагаем, что в системе (1) операторы $\mathcal{K}_j$ удовлетворяют условиям $\mathcal{K}_1=-\mathcal{K}_4^*$, $\mathcal{K}_2=\mathcal{K}_2^*$, $\mathcal{K}_3=\mathcal{K}_3^*$, обеспечивающим существование интегралов энергии и, кроме того,

$$|\widehat{K}_1(p)|\leqslant c_1(1+|p|)^{\alpha_1},\quad \widehat{K}_2(p)\leqslant -c_2(1+|p|)^{\alpha_2},$$
$$\widehat{K}_3(p)\geqslant c_3(1+|p|)^{\alpha_3},\quad c_1,\ c_2,\ c_3>0. \tag{12}$$

Теорема 9. *Пусть операторы $\mathcal{K}_j$ в системе* (1) *удовлетворяют оценкам* (12), *причем числа α_j таковы, что $\alpha_1\leqslant(\alpha_2+\alpha_3)/2$ и либо $\alpha_3\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 4-\alpha_3$, $\alpha_2>2+\alpha_3$, либо $\alpha_2\geqslant\alpha_3>2$, а начальное возмущение $\bar{\eta}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$ выбрано таким образом, чтобы интеграл энергии $I_3(0)\leqslant c$; $\|\bar{\eta}\|_{H^{\alpha_3/2}}\leqslant c$, $\|\bar{\varphi}\|_{H^{\alpha_2/2}}\leqslant c$, где $c>0$ — некоторая константа. Тогда существует обобщенное решение задачи Коши для системы поверхностных волн* (1) *.

---

* Результат этого пункта принадлежит Е. И. Кайкиной.

§ 2. Асимптотика при $t \to +\infty$ решений диссипативных нелинейных нелокальных уравнений

Введение

В последние годы был достигнут большой прогресс в изучении асимптотики при $t \to \infty$ решений различных эволюционных уравнений. Это развитие основано на возможности применения метода обратной задачи рассеяния и, следовательно, заведомо ограничено консервативными нелинейными уравнениями [5—16]. Однако многие физические процессы описываются существенно диссипативными уравнениями. Широко известными примерами таких уравнений являются нелинейное уравнение Шрёдингера с линейной диссипацией (называемой также обобщенным уравнением Ландау—Гинзбурга) [1.48] *, [1.47], [17], нелинейные уравнения Бюргерса и КдФ — Бюргерса. Другой подход к асимптотике решений при $t \to \infty$ нелинейных эволюционных уравнений был открыт в известной работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [1.46]. Они рассматривали нелинейное уравнение

$$u_t - F(u) - u_{xx} = 0, \tag{13}$$

названное впоследствии уравнением КПП (по именам авторов); здесь $F(u)$ — некоторый нелинейный оператор, типичным примером нелинейности являются источники вида $F(u) = u^2 - u$. Развитый в работе [1.46] метод изучения асимптотики решений уравнения (13) при $t \to \infty$ основан на возможности использования явного вида фундаментального решения для линейной части уравнения (13). Эта работа вызвала большой поток исследований асимптотики при $t \to \infty$ решений различных модификаций уравнения КПП (см. обзор [1.50], [18]).

Однако оба описанных подхода неприменимы при построении асимптотики при $t \to \infty$ решений ННУ. Целью этого параграфа является нахождение асимптотики при $t \to \infty$ решений ННУ с диссипацией [19—21].

1°. Асимптотика решений задачи Коши для уравнения Уизема

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Уизема:

$$u_t + u_x^2 + \mathcal{K}(u) = 0, \quad u|_{t=0} = \overline{u}(x), \quad x \in R_1, \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

где

$$\mathcal{K}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ipx\} \widehat{K}(p) \widehat{u}(p, t)\, dp, \tag{15}$$

$\widehat{u}(p, t)$ — преобразование Фурье функции $u(x, t)$, $\widehat{K}(p)$ — символ оператора $\mathcal{K}$. Решение $u(x, t)$ задачи (14) предполагается вещественным, поэтому символ $\widehat{K}(p)$ должен удовлетворять условию $\widehat{K}^*(p) = \widehat{K}(-p)$, т. е. консервативная часть символа $\widehat{K}^2 = \mathrm{Im}\widehat{K}(p)$ является нечетной функцией $p \in R_1$, а неконсервативная часть $\widehat{K}^1 = \mathrm{Re}\widehat{K}(p)$ — четной. Справедлива

---

* Ссылки вида [1.48] означают работу [48] в обзоре [1].

Теорема 10. *Пусть*: 1) *символ* $K(p)$ *удовлетворяет условиям*:

$K^1(p)=\lambda+\omega|p|^\delta$, $|K^2(p)|\leqslant c_1|p|^\beta$, $|p|\leqslant 1$, $\lambda\geqslant 0$, $0<\delta<3$, $\delta<\beta$, $\omega>0$;

$K^1(p)\geqslant\lambda+c_2m^\delta(p)M(p)$, $p\in R_1$;

$|\widehat{K}(p_1)-\widehat{K}(p_2)|\leqslant c_3|\Delta p|^{\sigma_1}M^\alpha(p_1)$, $|\Delta p|=|p_1-p_2|\leqslant 1$,

$p_1, p_2\in R_1$, $\sigma_1\in(0, 1]$, $\alpha\geqslant 0$, $m(p)\equiv\min(1, |p|)$,

$M(p)\equiv\max(1, |p|)$;

2) *для фурье-образа* $\widehat{\bar{u}}(p)$ *начального возмущения* $\bar{u}(x)\in L_1(R_1)$ *выполнены оценки*

$|\widehat{\bar{u}}(p)|\leqslant\varepsilon M^{-3-\alpha}(p)$, $|\widehat{\bar{u}}(p_1)-\widehat{\bar{u}}(p_2)|\leqslant c_4|\Delta p|^{\sigma_2}M^{-3}(p_1)$,

$|\Delta p|\leqslant 1$, $p_1, p_2\in R_1$, $\sigma_2\in(0, 1]$, $c_i>0$, $i=1, \ldots, 4$,

и $0<\varepsilon<c$, *где* c — *некоторая константа, зависящая от* $\widehat{K}(p)$. *Тогда для решения* $u(x, t)$ *задачи Коши* (14) *при* $t\to\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$u(x, t)=A\exp\{-\lambda t\}\,t^{-1/\delta}\int_0^\infty\cos(p\xi)\exp\{-\omega p^\delta\}\,dp+O(\exp\{-\lambda t\}\,t^{-1/\delta-\beta}),\tag{16}$$

равномерная по $\xi=|x|t^{-1/\delta}>0$, $\beta>0$ *зависит от символа* $\widehat{K}(p)$, A — *некоторая константа, зависящая от символа* $\widehat{K}(p)$ *и начальной функции* $\bar{u}(x)$. *Вид этой зависимости может быть представлен в явной форме* (*см.* [21]).

Пример. Символ $\widehat{K}(p)=c_1|p|^\delta+ic_2|p|^{\nu\delta}\operatorname{sgn}p$, $\delta\in(0, 3)$, $\nu\in(1, \infty)$, $c_1>0$, c_2 — любое вещественное число, удовлетворяет всем условиям теоремы 1. В частности, если $\delta=2$, $\nu=3/2$, то $\widehat{K}(p)$ отвечает уравнению Кортевега—де Фриза—Бюргерса. Символ $\widehat{K}(p)=ap^2+bp^4$, $a>0$, $b>0$, отвечающий уравнению Курамото — Сивашинского, также удовлетворяет условиям теоремы 1, и для решения справедлива асимптотическая формула (16) с $\delta=2$. В этих примерах $\lambda=0$.

2°. Асимптотика решений задачи Коши для нелинейного нелокального уравнения Шрёдингера

Рассмотрим задачу Коши для ННУШ:

$$iu_t+u^2u^*+i\mathscr{K}(u)=0,\quad u|_{t=0}=\bar{u}(x),\quad x\in R_1,\quad t\geqslant 0,\tag{17}$$

здесь линейный оператор $\mathscr{K}(u)$ определен по формуле (15).

Если $i\mathscr{K}(u)=u_{xx}+iau$, что соответствует символу $\widehat{K}(p)=ip^2+a$, то (5) является обобщенным уравнением Ландау — Гинзбурга [1.48], [1.47], [17] в случае, когда $i\mathscr{K}(u)=u_{xx}+\int_{-\infty}^{\infty}q(x-y)u(y, t)\,dy$, что соответствует символу $\widehat{K}(p)=ip^2-i\hat{q}(p)$, уравнение (17) является ННУШ и описывает процессы, связанные с диссипацией или накачкой энергии [1.42]—[1.44], [1.47].

Отметим, что если символ $\hat{K}(p)$ чисто мнимый и четный, то уравнение (17) имеет следующие три закона сохранения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} uu^* \, dx = \mathrm{const}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} uu_x^* \, dx = \mathrm{const},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(uu^*)^2 + 2u\mathcal{K}(u^*)] \, dx = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Теорема 11. *Пусть*: 1) *символ* $\hat{K}(p)$ *удовлетворяет условиям*:

$K^1(p) = \lambda + \omega |p|^\delta, \quad \delta \in (0, 2), \quad \lambda \geqslant 0, \quad \omega > 0,$

$|K^2(p)| \leqslant c_1 |p|^\beta, \quad \beta > \delta, \quad |p| \leqslant 1;$

$K^1(p) \geqslant \lambda + 2\varkappa(p), \quad \varkappa(p) = c_2 m^\delta(p), \quad p \in R_1;$

$|\hat{K}(p_1) - \hat{K}(p_2)| \leqslant c_3 |\Delta p|^{\sigma_1} M^\alpha(p_1), \quad |\Delta p| = |p_1 - p_2| \leqslant 1, \quad p_1, p_2 \in R_1,$

$\alpha \geqslant 0, \quad \sigma_1 \in (0, 1];$

2) *фурье-образ* $\hat{\bar{u}}(p)$ *начального возмущения* $\bar{u}(x) \in L_1(R_1)$ *удовлетворяет оценкам:*

$|\hat{\bar{u}}(p)| \leqslant \varepsilon M^{-3-\alpha}(p), \quad p \in R_1; \quad |\hat{\bar{u}}(p_1) - \hat{\bar{u}}(p_2)| \leqslant$

$\leqslant c_4 |\Delta p|^{\sigma_2} M^{-2}(p_1), \quad |\Delta p| \leqslant 1, \quad p_1, p_2 \in R_1, \quad \sigma_2 \in (0, 1], \quad c_i > 0,$

$i = 1, \ldots, 4,$

$\varepsilon > 0$ *достаточно мало. Тогда для решения* $u(x, t)$ *задачи Коши* (17) *справедлива асимптотическая формула* (16), *равномерная по* $\xi = |x| t^{-1/\delta} > 0$.

Пример. Символ $i\hat{K}(p) = c_1 p^2 + ic_2 |p|^\delta$, $\delta < 2$, $c_2 > 0$, c_1 — любое, удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и отвечает уравнению ННУШ с диссипацией.

Замечание. В теоремах 10 и 11 предполагается степенная зависимость символа $\hat{K}(p)$ при малых p. Этот случай является наиболее интересным для физических приложений. Однако и общий случай произвольной зависимости от p символа $\hat{K}(p)$ допускает подобное рассмотрение. Так, например, для обобщенного уравнения Ландау — Гинзбурга, символ $\hat{K}(p)$ которого имеет вид $\hat{K}(p) = ip^2 + a$, $a > 0$, решение $u(x, t)$ соответствующей задачи Коши при $t \to \infty$ имеет следующую асимптотику:

$$u(x, t) = t^{-1/2} \exp\{i\xi^2 t - at\} A(\xi) + O(t^{-1} \exp\{-at\}), \tag{19}$$

равномерную по $\xi = x/2t \in R_1$, где величина $A(\xi)$ допускает явное представление через символ $\hat{K}(p)$ и $\bar{u}(x)$.

3°. Асимптотика решений задачи Коши для обобщенного уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова

Рассмотрим задачу Коши для обобщенного уравнения КПП:

$$u_t - u^2 + \mathcal{K}(u) = 0, \quad u|_{t=0} = \bar{u}(x). \tag{20}$$

Здесь $\mathscr{K}(u)$ определено по формуле (15). Уравнению КПП отвечает символ $\widehat{K}(p)=1+p^2$. Справедлива

Теорема 12. *Пусть символ $\widehat{K}(p)$ удовлетворяет условиям:*

1) $K^1(p)=1+|p|^\delta, \quad |K^2(p)|\leqslant c_1|p|^\beta, \quad \beta>\delta>0, \quad |p|\leqslant 1/2;$

$K^1(p)\geqslant 1+\gamma, \quad \gamma>0, \quad |p|\geqslant 1/2;$

$|\widehat{K}(p_1)-\widehat{K}(p_2)|\leqslant c_2|\Delta p|^{\sigma_1}M^\alpha(p_1), \quad |\Delta p|=|p_1-p_2|\leqslant 1,$

$\sigma_1\in(0,\ 1], \quad \alpha\geqslant 0, \quad p_1,\ p_2\in R_1, \quad c_1,\ c_2\geqslant 0;$

2) *фурье-образ $\widehat{\bar{u}}(p)$ начального условия $\bar{u}(x)\in L_1(R_1)$ удовлетворяет следующим требованиям:*

$|\widehat{\bar{u}}(p)|\leqslant \varepsilon M^{-2-\alpha}(p), \quad p\in R_1,$

$|\widehat{\bar{u}}(p_1)-\widehat{\bar{u}}(p_2)|\leqslant \varepsilon|\Delta p|^{\sigma_2}M^{-2}(p_1), \quad |\Delta p|\leqslant 1, \quad \sigma_2\in(0,\ 1],$

где $0<\varepsilon<c$, $c>0$ определяется символом $\widehat{K}(p)$. Тогда при $t\to\infty$ равномерно по $\xi=|x|t^{-1/\delta}>0$ имеет место асимптотика:

$$u(x,\ t)=A\exp\{-t\}t^{-1/\delta}\int_0^\infty\cos(p\xi)\exp\{-p^\delta\}\,dp+O(\exp\{-t\}t^{-1/\delta-\gamma_0}), \tag{21}$$

где $\gamma_0>0$ — некоторая константа, определяемая символом $\widehat{K}(p)$, константа A выражается через символ $\widehat{K}(p)$ и начальное условие $\widehat{\bar{u}}(p)$ явным образом (*см.* [19]).

Пример. В частности, теорема 12 верна для самого КПП, при этом в асимптотике (21) $\delta=2$, $\gamma_0=1/2$.

4°. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега—де Фриза—Бюргерса (КдФБ)

Уравнение КдФБ:

$$u_t+2uu_x+au_{xxx}-bu_{xx}=0; \quad a,\ b=\mathrm{const} \tag{22}$$

представляет значительный математический интерес, поскольку оно объединяет в себе типичную гидродинамическую нелинейность, простейшую нетривиальную дисперсию и диссипацию. Это уравнение описывает такие физические явления, как распространение слабых ударных волн в плазме, эволюцию газожидкостной смеси, волны в упругой трубке, заполненной жидкостью, и др. [22—26].

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (22) с начальным условием $\bar{u}(x)$ и изучим асимптотику решения при $t\to\infty$. В случае когда начальное возмущение $\bar{u}(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности, асимптотика решения задачи Коши при больших временах найдена в пункте 1° этого параграфа: равномерно по $\xi=|x|/(2\sqrt{t})\geqslant 0$ справедливо представление

$$u(x,\ t)=At^{-1/2}\exp\{-\xi^2\}+O(t^{-1}), \tag{23}$$

A — константа, явным образом зависящая от $\bar{u}(x)$.

Весьма интересной задачей для уравнения КдФБ является задача о распаде ступеньки, т. е. изучение асимптотического при $t \to \infty$ поведения решения задачи Коши для уравнения (22) с достаточно гладким начальным условием $\bar{u}(x) \to \mp 1$ при $x \to \pm\infty$. Этой задачей занимались многие авторы: Джефри [27] нашел два точных решения типа бегущих волн; Бона и Шёнбек [28] доказали существование решений вида бегущих волн и рассмотрели их пределы при $a, b \to 0$; С. П. Новиков, В. В. Авилов, И. М. Кричевер [1.25], [1.26] изучали задачу о распаде ступеньки численными методами.

В этом пункте мы рассмотрим задачу о распаде ступеньки в общей постановке и, в частности, дадим положительный ответ на поставленную в работе Бона и Шёнбека [28] проблему об устойчивости решений типа бегущей волны.

Итак, рассмотрим задачу о распаде ступеньки для КдФБ:

$$\begin{gathered} u_t + 2uu_x + au_{xxx} - u_{xx} = 0, \\ u(x,\ 0) = \bar{u}(x),\ \bar{u}(x) \to \mp 1, \quad x \to \pm\infty. \end{gathered} \tag{24}$$

Несколько более общая задача:

$$\begin{gathered} \psi_t + 2\psi\psi_x + \alpha\psi_{xxx} - \beta\psi_{xx} = 0, \\ \psi(x,\ 0) = \bar{\psi}(x),\ \bar{\psi}(x) \to b_\pm \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty, \quad b_+ < b_-, \quad \beta > 0 \end{gathered} \tag{25}$$

сводится к задаче (24) с помощью замены

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\eta}\left[\psi\left(\frac{\beta}{\eta}\left(x + \frac{2\xi t}{\eta}\right),\ \frac{\beta t}{\eta^2}\right) - \xi\right],$$

где

$$\xi = \frac{1}{2}(b_- + b_+), \quad \eta = \frac{1}{2}(b_- - b_+),$$

$$a = \frac{\alpha\eta}{\beta^2}, \quad \bar{u}(x) = \frac{1}{\eta}\left[\bar{\psi}\left(\frac{\beta x}{\eta}\right) - \xi\right].$$

Не ограничивая общности, можно считать, что константа a в задаче (24) положительна, это достигается заменой

$$w(x,\ t) = -u(-x,\ t).$$

Рассмотрим для задачи (24) решения вида бегущей волны $\varphi(x - \lambda t)$, удовлетворяющие на бесконечности условиям

$$\varphi \to \pm 1,\ \varphi_x,\ \varphi_{xx} \to 0 \text{ при } x \to \mp\infty.$$

Легко видеть, что бегущая волна $\varphi(x - \lambda t)$ удовлетворяет уравнению

$$-a\varphi_{xx} + \varphi_x - \frac{1}{2}(1 - \varphi^2) = 0, \tag{26}$$

причем $\lambda = 0$ (т. е. $\varphi(x - \lambda t) = \varphi(x)$ — стоячая волна). Как показано в работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, Н. С. Пискунова [1.46], существует единственное решение уравнения (26) с условиями $\varphi \to \pm 1$ при $x \to \mp\infty$, если выполнено условие $1 \geqslant 8|a|$. Справедлива

Теорема 13. *Пусть выполнены условия:*

1) $0 < a \leqslant 1/8$;

2) *существует число α такое, что функция*

$$\bar{w}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} (\bar{u}(x+\alpha) - \varphi(x))\,dx \in H^{\infty}(R_1),$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \bar{w}^2(x)\,dx < \infty; \tag{27}$$

3) *начальное условие $\bar{u}(x+\alpha)$ достаточно близко к $\varphi(x)$:*

$$\|\bar{w}(x)\|_{H^s(R_1)} \leqslant c_1, \tag{28}$$

$c_1>0$ — некоторая константа. Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ задачи Коши (24) и справедлива оценка для всех $t\geqslant 0$:

$$\|w(x,\ t)\|_{H^s(R_1)} \leqslant c_2(t+1)^{-1/2}, \tag{29}$$

$c_2>0$ — некоторая постоянная, а

$$w(x,\ t) \equiv \int\limits_{-\infty}^{x} (u(x+\alpha,\ t) - \varphi(x))\,dx. \tag{30}$$

Замечание. Из оценки (29) следует, в частности, что при $t\geqslant 0$

$$\sup_{x\in R_1} |u(x+\alpha,\ t) - \varphi(x)| \leqslant c_2(t+1)^{-1/2}, \tag{31}$$

т. е. решение задачи (24) существует, единственно и стремится при $t\to\infty$ к стационарному решению $\varphi(x)$ равномерно по $x\in R_1$ с оценкой скорости сходимости. Из неравенства (31) вытекает асимптотическая устойчивость бегущей (стоячей) волны.

5°. Асимптотика решений задачи Коши для системы уравнений поверхностных волн

Вернемся к задаче Коши (3) для системы уравнений поверхностных волн. Будем считать, что начальное возмущение поверхности $\bar{\eta}(x)$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \bar{\eta}(x)\,dx = 0.$$

Из закона сохранения массы (см. [2, 3]) следует, что $\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \eta(x,\ t)\,dx = 0$ при всех $t\geqslant 0$, если выполнено условие $k_2(0)=0$. Далее будем считать последнее требование выполненным. Определим вектор:

$$\hat{v}(p,\ t) = \begin{pmatrix} \hat{\eta}(p,\ t)|p|^{-1} \\ \hat{u}(p,\ t) \end{pmatrix}$$

и вектор решения $v(x,t)$ как обратное преобразование Фурье:

$$v(x,\ t) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i(p,\ x)\}\,\hat{v}(p,\ t)\,dp.$$

Введем матрицу

$$K(p)=\begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \widehat{K}_1(p) & \widehat{K}_2(p)|p|^{-1} \\ |p|\widehat{K}_3(p) & \widehat{K}_4(p) \end{pmatrix}$$

и обозначим $\lambda_1(p)$, $\lambda_2(p)$, $\lambda_3(p)$ собственные значения матрицы $K(p)$; будем считать $\lambda_j(p)$ различными* при $p\in R_2\backslash 0$ и упорядочим их по возрастанию реальных частей. Рассмотрим также фундаментальную матрицу Коши

$$\exp\{-K(p)t\}\equiv\sum_{j=1}^{3}\exp\{-\lambda_j(p)t\}D_j(p)$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от параметра $p\in R_2$:

$$\frac{d\psi(p,\ t)}{dt}+K(p)\psi(p,\ t)=0,$$

где $D_j(p)$ — матрицы 3×3. Всюду далее будем обозначать

$$|h|=\Big(\sum_{i=1}^{N}(h^{(i)})^2\Big)^{1/2}$$

для вектора $h=(h^{(1)},\ h^{(2)},\ \ldots,\ h^{(N)})\in R_N$.

Теорема 14. *Пусть*: 1) *матрица* $K(p)$ *такова, что*

$$\lambda_j^1\equiv\operatorname{Re}\lambda_j=a_j+b_j|p|^{\delta_j}+O(|p|^{\delta+\sigma_1})\ \text{при}\ |p|\leqslant1,$$

$$\lambda_j^1\geqslant a+c_1m^\delta(p)M(p)\quad\text{при}\ p\in R_2,$$

$$|\operatorname{Im}\lambda_j(p)|\leqslant c_2|p|^{\delta+\sigma_2}\ \text{при}\ |p|\leqslant1,$$

$$\|D_j(p)\|\leqslant c_3{}^{**}\ \text{при}\ p\in R_2,$$

$$|\lambda_j(p_1)-\lambda_j(p_2)|+\|D_j(p_1)-D_j(p_2)\|\leqslant c_4|\Delta p|^{\sigma_3}M^\alpha(p_1);$$

2) *для фурье-образа начального возмущения* $\hat{\bar v}(p)\in(L_1(R_2))^3$ *выполнены следующие оценки*:

$$|\hat{\bar v}(p)|\leqslant\varepsilon M^{-4-\alpha}(p),\qquad p\in R_2,$$

$$|\hat{\bar v}(p_1)|-\hat{\bar v}(p_2)|\leqslant c_5|\Delta p|^{\sigma_4}M^{-4}(p_1),$$

где

$$0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3,\ b_j>0,\ \delta_j>0,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \delta=\max(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3),$$

$$\delta\in(0,\ 3),\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4\in(0,\ 1],\ \alpha\geqslant0,\ c_1,\ \ldots,\ c_5>0,\ |\Delta p|=$$

$$=|p_1-p_2|\leqslant1,\ p_1,\ p_2\in R_2\setminus0,\ m(p)\equiv\min(1,\ |p|),$$

$$M(p)\equiv\max(1,\ |p|).$$

---

* Случай равных корней вносит дополнительные технические осложнения, хотя характер асимптотики остается прежним.

** Здесь и далее $\|A\|$ понимается как норма линейного оператора, действующего из R_3 в R_3.

При этом $0<\varepsilon<c$, *где* c — *некоторая положительная константа, определяемая матрицей* $K(p)$.

Тогда для решения $v(x,t)$ *задачи Коши* (3) *справедлива равномерная по* $\xi=xt^{-1/\delta}\in R_2$ *асимптотика при* $t\to\infty$:

$$v(x,\ t)=A(\xi)\exp\{-at\}\,t^{-2/\delta_1}+O(\exp\{-at\}\,t^{-2/\delta_1-\mu}),$$

где $\mu>0$ — *некоторая постоянная, а функция* $A(\xi)$ *имеет следующий вид*:

1) *если* $a_1=a_2=a_3$ *и* $\delta_1=\delta_2=\delta_3$,

$$A(\xi)=\sum_{N=0}^{\infty}\varepsilon^{N+1}\sum_{j=1}^{3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}d|q|\,|q|\exp\{i(q,\ \xi)-b_j|q|^{\delta_1}\}\widetilde{D}_j(\varphi)\,\Phi_N(\varphi),\qquad(32)$$

2) *если* $0\leqslant a_1=a_2=a_3$ *и* $\delta_1>\delta_2\geqslant\delta_3$, *либо* $a_1=a_2<a_3$ *и* $\delta_1>\delta_2>0$, $\delta_3>0$, *либо* $0\leqslant a_1<a_2\leqslant a_3$ *и* $\delta_1>0$, $\delta_2>0$, $\delta_3>0$,

$$A(\xi)=\sum_{N=1}^{\infty}\varepsilon^{N+1}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}d|q|\,|q|\exp\{i(q,\ \xi)-b_1|q|^{\delta_1}\}\,\Phi_N(\varphi);$$

3) *если* $0\leqslant a_1=a_2=a_3$ *и* $\delta_1=\delta_2>\delta_3$, *либо* $0\leqslant a_1=a_2<a_3$ *и* $\delta_1=\delta_2>0$, $\delta_3>0$,

$$A(\xi)=\sum_{N=0}^{\infty}\varepsilon^{N+1}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}d|q|\,|q|\exp\{i(q,\ \xi)-b_j|q|^{\delta_1}\}\widetilde{D}_j(\varphi)\,\Phi_N(\varphi),$$

где

$$\widetilde{D}_j(\varphi)=\lim_{p\to0;\ \frac{p}{|p|}=(\cos\varphi,\sin\varphi)=\mathrm{const}}D_j(p),$$

а векторы $\Phi_N(\varphi)$ *выражаются через символ* $K(p)$ *и допускают явное представление.*

Примеры. 1) Рассмотрим систему уравнений Буссинеска с вязкостью:

$$\eta_t+(\nabla,\ \eta u)-g_1\triangle\eta+g_2\triangle(\nabla,\ u)=0,$$
$$u_t+(u,\ \nabla)u+g_3\nabla\eta-g_4\triangle u=0,$$

где g_1, g_2, g_3, g_4 — константы: $g_4>0$, $g_1g_4>g_2g_3>0$. Собственные значения матрицы $K(p)$ равны

$$\lambda_1(p)=\frac{1}{2}|p|^2(g_1+g_4-g_5),\ \lambda_2(p)=g_4|p|^2,$$

$$\lambda_3(p)=\frac{1}{2}|p|^2(g_1+g_4+g_5),\quad g_5=\sqrt{(g_1-g_4)^2+4g_2g_3}.$$

Асимптотика имеет вид

$$u(x,\ t)=A(\xi)t^{-1}+O(t^{-3/2}),\qquad(33)$$

вектор $A(\xi)$ дается формулой (32), где $\delta_1=2$, $b_j=\lambda_j(p)|p|^{-2}$.

2) Рассмотрим систему Доброхотова с вязкостью:

$$\eta_t+(\nabla,\ \eta u)-g_1\triangle\eta+\sum_{i=1}^{2}\frac{g_2}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\{i(p,\ x)\}\left(\frac{\operatorname{th}|p|}{|p|}-1\right)\times$$

$$\times\, ip^{(j)}\,\widehat{u}^{(j)}(p,\ t)\,dp=0,$$

$$u_t+(u,\ \nabla)\,u+g_3\nabla\eta-g_4\triangle u=0,$$

где g_1, g_2, g_3, g_4 — константы: $g_4>0$, $g_1g_4>g_2g_3>0$. Собственные значения матрицы $K(p)$ равны,

$$\lambda_1(p)=\frac{1}{2}(|p|^2(g_1+g_4)-g_5),\ \lambda_2(p)=g_4\,|p|^2,$$

$$\lambda_3(p)=\frac{1}{2}(|p|^2(g_1+g_4)+g_5),$$

$$g_5=\sqrt{(g_1-g_4)^2\,|p|^4+4g_2g_3(|p|^2-|p|\operatorname{th}|p|)}.$$

Асимптотика имеет вид (32), (33).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Наумкин П. И., Шишмарев И. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. **31**, № 5. С. 3. [2] Наумкин П. И., Шишмарев И. А.//ДАН СССР. 1988. **301**, № 4. С. 788. [3] Шишмарев И. А.//Матем. заметки. 1989. **45**, № 1. С. 136. [4] Шишмарев И. А.//Тез. докл. Всесоюз. школы «Функциональные методы в прикладной математике и математической физике». Ташкент, 1988. С. 74. [5] Kaup D. J., Newell D.//J. Math. Phys. 1978. **19**. P. 798. [6] Буслаев В. С.//УМН. 1981. **36**, № 4. С. 217. [7] Захаров В. Е., Манаков С. В.//ЖЭТФ. 1976. **71**, № 1. С. 203. [8] Итс А. Р.//ДАН СССР. 1981. **261**, № 1. С. 14. [9] Каменский В. Г., Манаков С. В.//Письма в ЖЭТФ. 1987. **45**, № 10. С. 499. [10] Манаков С. В.//ЖЭТФ. 1973. **65**, № 5. С. 1392. [11] Новокшенов В. Ю.//Изв. АН СССР, сер. матем. 1984. **48**, № 2. С. 372. [12] Суханов В. В.//ДАН СССР. 1983. **269**, № 5. С. 1091. [13] Шабат А. Б.//ДАН СССР. 1973. **211**, № 6. С. 1310. [14] Ablowitz M. J., Segur H.//Stud. Appl. Math. 1979. **57**. P. 13. [15] Miles J. W.//Stud. Appl. Math. 1979. **60**. P. 59. [16] Tanaka S.//Publ. RIMS, Kyoto Univ. 1975. **10**. P. 367. [17] Nozaki K., Bekki N.//J. Phys. Soc. Japan. 1984. **53**. P. 1581. [18] Ильин А. М., Олейник О. А.//Матем. сб. 1960. **51**, № 2. С. 191. [19] Наумкин П. И., Шишмарев И. А.//Матем. моделирование. 1989. **1**, № 6. С. 109. [20] Наумкин П. И., Шишмарев И. А.//Матем. заметки. 1989. **45**, № 4. С. 118. [21] Наумкин П. И., Шишмарев И. А.//Матем. моделирование. 1990. **2**, № 3. С. 75. [22] Johnson R. S.//J. Fluid Mech. 1970. **42**. P. 49. [23] Grighton D. G.//Ann. Rev. Fluid. Mech. 1979. **11**. P. 11. [24] Grad H., Hu P. W.//Phys. Fluids. 1967. **10**. P. 2596. [25] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М., 1979; Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М., 1988. [26] Горьков Ю. П.//Матем. заметки. 1974. **15**, № 4. С. 80. [27] Jeffrey A.//Wave Motion. 1989. **11**. P. 559. [28] Bona J. L., Schonbek M. E.//Proc. Roy. Soc. 1985. **101 A**. P. 207.

Поступила в редакцию
10.11.89