ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145

КВАНТОВЫЙ ПРЕДЕЛ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ЭНЕРГИИ С ПОМОЩЬЮ ЭФФЕКТА КЕРРА

Ю. И. Воронцов

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

В ранее опубликованных работах при расчете погрешности измерения энергии волны с помощью оптического эффекта Керра считалось, что погрешность измерения величины E^2 (E — амплитуда напряженности электрического поля) в нелинейной среде полностью определяет погрешность оценивания энергии волны. Не учитывалось, что во время измерения принципиально неопределенным становится волновое сопротивление среды и неопределенность его тем больше, чем точнее измерение E^2. Поэтому при таких измерениях погрешность имеет принципиальный квантовый предел, равный $(n/(\omega_2\tau))^{1/2}\hbar\omega_1$ (n — среднее число фотонов; ω_1, ω_2 — частота волны до и во время измерения соответственно; τ — длительность измерения).

Известны фундаментальные соотношения, связывающие среднеквадратичную погрешность измерения энергии ΔW с длительностью измерения τ. В случае измерения энергии частиц с отличной от нуля массой покоя или энергии электромагнитных колебаний в сосредоточенной цепи квантовая теория допускает, что $\Delta W < \hbar/\tau$ [1—3]. В случае измерения энергии электромагнитной волны $\Delta W > \hbar/\tau$ [3]. Оба соотношения получены при условии, что гамильтониан взаимодействия объекта с прибором пропорционален гамильтониану объекта, т. е. выполнены условия невозмущающего измерения энергии. В схемах измерения энергии волны с помощью оптического эффекта Керра [3—6] взаимодействие объекта с прибором является функцией квадрата напряженности только электрического поля (E^2). При этом возможно квазиневозмущающее измерение энергии [3, 7], предел погрешности которого ниже так называемого стандартного квантового предела $\sqrt{n}\,\hbar\omega$ (n — среднее число квантов, ω — частота), но выше, чем при невозмущающем измерении.

Известны два способа использования оптического эффекта Керра в схемах измерения энергии волны. В работе [5] предложено поместить световод с нелинейной восприимчивостью в поле конденсатора. Волна в световоде, изменяя диэлектрическую проницаемость волокна, влияет на емкость конденсатора. Измерив изменение емкости, можно оценить энергию волны. В работе [6] предложено оценивать энергию одной волны (сигнальной), измеряя сдвиг фаз другой (пробной), обусловленный взаимодействием волн в нелинейной среде. При расчете погрешности измерения энергии в этих схемах не обращалось внимания на принципиально неустранимый эффект, обусловливающий квантовый предел погрешности измерения. В указанных работах считается, что точное измерение E^2, даже в нелинейной среде, означает точное измерение энергии. Но это не так. Плотность потока энергии в волне равна

$$P = E^2/\sqrt{\mu/\varepsilon} \tag{1}$$

(при известной идеализации свойств среды), где μ, ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости на частоте волны. Описываемые измерения неразрывно связаны с принципиально неустранимым случайным возмущением ε во время взаимодействия волны с прибором. Возмущение ε приводит к возмущению фазовой скорости, что обеспечивает требуемое теорией случайное изменение фазы и координаты при измерении энергии. Возмущение ε будет тем больше, чем точнее измерение E^2 за заданное время τ [3, 8]. Следовательно, во время взаимодействия с прибором связь между E^2 и потоком энергии случайна. Измерив E^2, можно оценить W во время измерения лишь приближенно. После выключения связи с прибором (выключения поля в конденсаторе, выключения пробной волны, выход волны из нелинейной среды) величина ε становится определенной (с точностью до эффекта самовоздействия волны). Но при этом случайной становится величина E^2, поскольку неопределенно изменение ε при выключении прибора. Таким образом, невозможно точно оценить не только поток энергии во время измерения, но и поток, относящийся ко времени до и после измерения.

Изменение E^2 при включении прибора зависит от схемы измерения. В первой схеме пробное электрическое поле в конденсаторе может включаться в то время, когда вся сигнальная волна целиком находится внутри конденсатора. Пробное поле изменяет диэлектрическую проницаемость волокна одновременно по всей длине. В этом случае сохраняется длина волны, но изменяется частота. Число квантов и импульс волны при адиабатическом изменении поля не изменяются. Частота изменяется согласно соотношению $\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$, где ω_1, ω_2 — частота волны до и после включения пробного поля. Соответственно связаны и значения энергии волны:

$$W_1 = W_2 \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,. \tag{2}$$

Напряженности поля относятся как $E_1^2/E_2^2 = (\varepsilon_2/\varepsilon_1)^{3/2}$. Среднеквадратичная погрешность оценки величины W_1 при измерении W_2 со среднеквадратичной погрешностью ΔW_2 в этом случае равна (в приближении $\Delta\varepsilon_2/\bar{\varepsilon}_2 \ll 1$)

$$\Delta W_1 = \sqrt{\bar{\varepsilon}_2/\varepsilon_1}\ [(\Delta W_2)^2 + (\overline{W}_2 \Delta\varepsilon_2/2\bar{\varepsilon}_2)^2]^{1/2}, \tag{3}$$

$\bar{\varepsilon}_2$ — среднее значение ε_2.

Во второй схеме сигнальная волна входит в нелинейную среду одновременно с пробной. Аналогичная ситуация может быть и в первой схеме, если поле конденсатора включается до прихода волны. В этом случае волны сохраняют частоту, но меняют длину. Поскольку отражение в принципе можно сделать сколь угодно малым, можно допустить, что энергия сохраняется, т. е.

$$W_1 = W_2, \quad E_1^2 = E_2^2 \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}\,. \tag{4}$$

В обоих случаях, измерив E_2^2, оценить величину E_1^2 из-за случайности величины ε_2 можно лишь приближенно. Соответственно, приближенной будет оценка энергии.

Энергия бегущей волны на участке длительностью τ_i связана с E^2 соотношением

$$W_2 = S \int_{\xi}^{\xi+\tau_i} \frac{E_2^2(\xi)}{\rho_2}\, d\xi = S \int_{\xi}^{\xi+\tau_i} \frac{E_2^2(\xi)}{\bar{\rho}_2 (1 + \delta\rho_2/\bar{\rho}_2)}\, d\xi, \tag{5}$$

где $\xi = t - x/v$, v — фазовая скорость, S — площадь сечения, $\bar{\rho}_2$, $\delta\rho_2$ — среднее значение и вариация ρ_2 во время измерения. В приближении $\delta\rho_2/\bar{\rho}_2 \approx \delta\varepsilon_2/\bar{\varepsilon}_2 \ll 1$, считая величину $\delta\varepsilon_2/\bar{\varepsilon}_2$ не зависящей от ξ получим

$$W_2 = \int\limits_{\xi}^{\xi+\tau_i} E_2^2(\xi)\, d\xi \cdot (1 - \delta\varepsilon_2/2\bar{\varepsilon}_2)\, S/\bar{\rho}_2. \tag{6}$$

В обеих схемах фактически измеряется $\int E_2^2(\xi)\, d\xi$, а в качестве оценки энергии берется величина $S\int E_2^2(\xi)\, d\xi/\bar{\rho}_2$.

Среднеквадратичная погрешность оценивания W_2 будет равна

$$\Delta W_2 = [(\Delta W_2)_m^2 + (\bar{W}_2 \Delta\varepsilon_2/2\bar{\varepsilon}_2)^2]^{1/2}, \tag{7}$$

где

$$(\Delta W_2)_m = (S/\bar{\rho}_2)\, \Delta \int E_2^2(\xi)\, d\xi, \quad \bar{W}_2 = (S/\bar{\rho}_2) \int \overline{E_2^2}(\xi)\, d\xi.$$

Величина $(\Delta W_2)_m$ пропорциональна неопределенности фазы пробного поля, а $\Delta\varepsilon_2/\varepsilon_2$ — неопределенности его энергии. Поэтому сумма в соотношении (7) ограничена снизу. Вычислить соответствующий предел погрешности измерения можно было бы, анализируя процесс взаимодействия сигнальной и пробной волн в конкретной схеме измерения, но проще это сделать, используя некоторые общие закономерности квантовой теории измерений. Если бы не возмущалось значение ρ_2, т. е. выполнялось условие невозмущающего измерения энергии, прибор, способный измерить величину $\int E_2{}^2 d\xi$ с погрешностью Δ_m, позволял бы оценить энергию волны с погрешностью $(\Delta W)_m = S\Delta_m/\bar{\rho}_2$. Такой прибор должен возмущать фазовую скорость v_2 так, чтобы неопределенность координаты цуга волн увеличивалась за время измерения на

$$\Delta x = \Delta v_2 \tau \geqslant \hbar \bar{v}_2/2\, (\Delta W_2)_m. \tag{8}$$

Это неравенство можно рассматривать как следствие соотношения неопределенностей энергия — фаза при $n \gg 1$. Из (8) следует

$$\Delta\varepsilon_2/\bar{\varepsilon}_2 \geqslant \hbar/\tau\, (\Delta W_2)_m. \tag{9}$$

Из (8) и (9), учтя, что в схеме с взаимодействием бегущих волн $W_1 = W_2$, получим искомый предел погрешности измерения энергии

$$\Delta W_1 \geqslant \bar{W}_2 \left[\frac{(\Delta W_2)_m^2}{\bar{W}_2^2} + \left(\frac{\hbar}{2\tau\, (\Delta W_2)_m} \right)^2 \right]^{1/2} \geqslant \sqrt{\frac{\bar{W}_1 \hbar}{\tau}}. \tag{10}$$

Если спектр волны относительно узкий, то $\bar{W}_1 = n\hbar\omega_1$ и соответственно

$$\Delta W_1 \geqslant \sqrt{\frac{n}{\omega_1 \tau}}\, \hbar\omega_1. \tag{11}$$

Заметим, что в этой анализируемой схеме $\omega_1 = \omega_2$.

В схеме с конденсатором, как следует из (2),

$$\Delta W_1 \geqslant \sqrt{\frac{\sqrt{2}\, \bar{\varepsilon}_2 \bar{W}_2 \hbar}{\varepsilon_1 \tau}}. \tag{12}$$

В квазигармонической волне $\bar{W}_2=n\hbar\omega_2$. Поскольку теперь $\omega_2=\omega_1\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$, то

$$\Delta W_1 \geqslant \sqrt{\frac{\sqrt{2}\,n}{\omega_2\tau}}\,\hbar\omega_1. \tag{13}$$

Таким образом, предел погрешности измерения энергии в обоих случаях в $\sqrt{\omega_2\tau}$ раз ниже стандартного квантового предела $\sqrt{n}\,\hbar\omega$, но много выше значения $\hbar/\tau$. В произведение $\omega_2\tau$ входит та частота сигнальной волны, которая имеет место во время измерения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Воронцов Ю. И.//ДАН СССР. 1980. **251**, № 5. С. 1110. [2] Воронцов Ю. И.//УФН. 1981. **133**, № 2. С. 351. [3] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989. [4] Брагинский В. Б., Вятчанин С. П.//ДАН СССР. 1982. **264**, № 5. С. 1136. [5] Брагинский В. Б., Вятчанин С. П.//ДАН СССР. 1981. **259**, № 3. С. 570. [6] Imoto N., Haus D. F., Yamamoto Y.//Phys. Rev. 1985. **A 32**. P. 2287. [7] Braginsky V. B., Vorontsov Y. I., Thorne K. S.//Science. 1980. **209**. P. 547. [8] Воронцов Ю. И.//ДАН СССР. 1980. **303**, № 5. С. 1116.

Поступила в редакцию
26.04.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

УДК 539.194:519.633.6

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ КОНЦЕНТРАЦИИ РАСТВОРОВ

С. И. Кауль, П. К. Сенаторов

(кафедра математики)

Моделируется динамика концентрации раствора органического красителя путем численного решения уравнения типа уравнения диффузии с учетом влияния стенок кюветы, в которой находится исследуемый раствор. Делается вывод о необходимости учета динамики концентрации при обработке экспериментальных данных.

В физическом эксперименте иногда необходимо учитывать влияние внешних сил, действующих на растворенное в жидкости вещество [1, 2]. Динамика концентрации раствора $U(M, t)$ в этом случае, а также в более широком классе задач, когда на результатах эксперимента сказывается непостоянство концентрации, может быть описана в линейном приближении уравнением типа уравнения диффузии [3]:

$$\partial U/\partial t = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U - \zeta \mathbf{F} U), \tag{1}$$

где M — точка области S трехмерного пространства, t — время, $\mathbf{F}(M, t)$ — внешняя сила, $\zeta(M)$ — коэффициент подвижности.

Обычно для исследуемого вещества выполняется закон сохранения числа частиц. Предположив это и использовав уравнение (1), получим условия на границе Γ области S:

$$(\partial U/\partial n - \mathbf{F}U)|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Пусть, кроме того, задана начальная концентрация:

$$U(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in (S+\Gamma). \tag{3}$$