

В квазигармонической волне $\bar{W}_2 = n\hbar\omega_2$. Поскольку теперь $\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$, то

$$\Delta W_1 \geq \sqrt{\frac{\sqrt{2} n}{\omega_2 \tau}} \hbar \omega_1. \quad (13)$$

Таким образом, предел погрешности измерения энергии в обоих случаях в $\sqrt{\omega_2 \tau}$ раз ниже стандартного квантового предела $\sqrt{n} \hbar \omega$, но много выше значения \hbar/τ . В произведение $\omega_2 \tau$ входит та частота сигнальной волны, которая имеет место во время измерения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Воронцов Ю. И. // ДАН СССР. 1980. 251, № 5. С. 1110. [2] Воронцов Ю. И. // УФН. 1981. 133, № 2. С. 351. [3] Воронцов Ю. И. Теория и методы макроскопических измерений. М., 1989. [4] Брагинский В. Б., Вятчанин С. П. // ДАН СССР. 1982. 264, № 5. С. 1136. [5] Брагинский В. Б., Вятчанин С. П. // ДАН СССР. 1981. 259, № 3. С. 570. [6] Imoto N., Haus D. F., Yamamoto Y. // Phys. Rev. 1985. A 32. P. 2287. [7] Braginsky V. B., Vorontsov Y. I., Thorne K. S. // Science. 1980. 209. P. 547. [8] Воронцов Ю. И. // ДАН СССР. 1980. 303, № 5. С. 1116.

Поступила в редакцию
26.04.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

УДК 539.194:519.633.6

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИКИ КОНЦЕНТРАЦИИ РАСТВОРОВ

С. И. Кауль, П. К. Сенаторов

(кафедра математики)

Моделируется динамика концентрации раствора органического красителя путем численного решения уравнения типа уравнения диффузии с учетом влияния стенок кюветы, в которой находится исследуемый раствор. Делается вывод о необходимости учета динамики концентрации при обработке экспериментальных данных.

В физическом эксперименте иногда необходимо учитывать влияние внешних сил, действующих на растворенное в жидкости вещество [1, 2]. Динамика концентрации раствора $U(M, t)$ в этом случае, а также в более широком классе задач, когда на результатах эксперимента сказывается непостоянство концентрации, может быть описана в линейном приближении уравнением типа уравнения диффузии [3]:

$$\partial U / \partial t = \text{div}(\text{grad } U - \xi F U), \quad (1)$$

где M — точка области S трехмерного пространства, t — время, $F(M, t)$ — внешняя сила, $\xi(M)$ — коэффициент подвижности.

Обычно для исследуемого вещества выполняется закон сохранения числа частиц. Предположив это и использовав уравнение (1), получим условия на границе Γ области S :

$$(\partial U / \partial n - F U)|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Пусть, кроме того, задана начальная концентрация:

$$U(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in (S + \Gamma). \quad (3)$$

Далее везде будем считать, что граница Γ и функции ζ , F , φ обладают достаточной гладкостью. Объединяя (1), (2) и (3), получим начальную-краевую задачу:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t &= D \Delta U + (\nabla D - F) \nabla U - (\zeta \operatorname{div} F + F \nabla \zeta) U, \\ U(M, t) &= \varphi(M), \quad t=0, \\ (D \nabla U - \zeta F U) |_{\Gamma} &= 0, \\ \zeta &= D / (kT), \end{aligned} \quad (4)$$

где D — коэффициент диффузии. В простейшем случае, при $D = \text{const}$, $F = F(x)$, $U = U(x, t)$ задача (4) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \zeta F \frac{\partial U}{\partial x} - \zeta \frac{\partial F}{\partial x} U, \\ U(x, t) &= \varphi(x), \quad t=0, \\ \left(D \frac{\partial U}{\partial x} - \zeta F U \right) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} &= 0, \\ \zeta &= D / (kT). \end{aligned} \quad (5)$$

Легко показать, что в сферической и цилиндрической системах координат, когда φ и F зависят только от радиальной переменной, а $\zeta = \text{const}$, задача (4) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \left(F - \frac{m}{r} \right) \frac{\partial U}{\partial r} - \left(\frac{mF}{r} + \frac{\partial F}{\partial r} \right) U, \\ U(r, t) &= \varphi(r), \quad t=0, \\ \left(D \frac{\partial U}{\partial r} - \zeta F U \right) \Big|_{r=r_1}^{r=r_2} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где r_1 и r_2 — соответственно внутренний и внешний радиусы кюветы, $m=1$ для цилиндрической и $m=2$ для сферической систем координат.

Рассмотрение задачи (4) в виде (6) в применении к системам, в которых преобладает центральная или осевая симметрия, не вызывает сомнения. Отметим, что в случае когда рассматривается задача для шара или цилиндра, при $r=0$ на решение $U(r, t)$ накладывается условие [4]

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^m \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Заметим, что для задачи (4) при достаточно гладких границе Γ и функциях ζ , D , F и φ имеет место теорема существования и единственности решения [5]. Решение задачи (5), так же как и (6), было получено нами численно, методом конечных разностей.

Сила F моделировалась выражением

$$F = a_0 \exp \{-a_1 x^2\},$$

где $a_0, a_1 = \text{const}$.

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. При проведении спектрального эксперимента с растворами адсорбирующих веществ следует учитывать влияние геометрии объекта

исследования на конечное распределение концентрации (рис. 1). Заметим, что в сферической кювете стенки оказывают более сильное влияние на динамику концентрации, чем в цилиндрической.

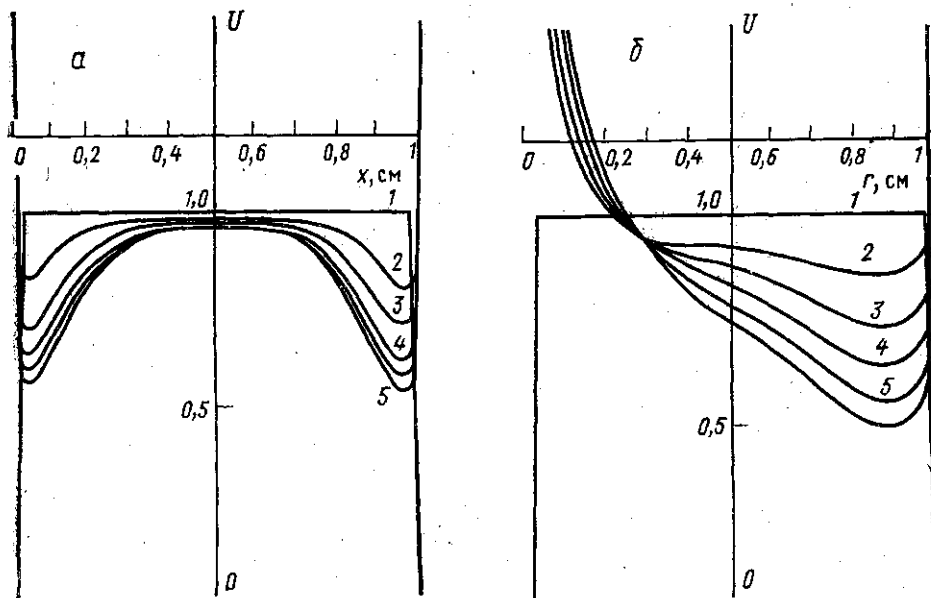


Рис. 1. Динамика распределения концентрации в плоской (а), сферической (б) и цилиндрической (в) кюветах ($r_1=1$ см, $r_2=2$ см): $t=0$ (1), 20 (2), 40 (3), 60 (4) и 80 с (5)

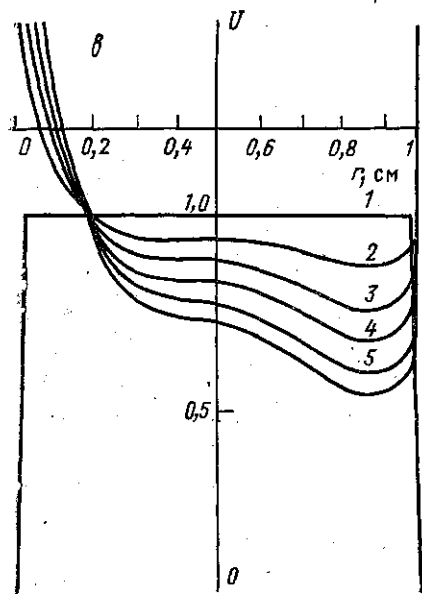


Рис. 1

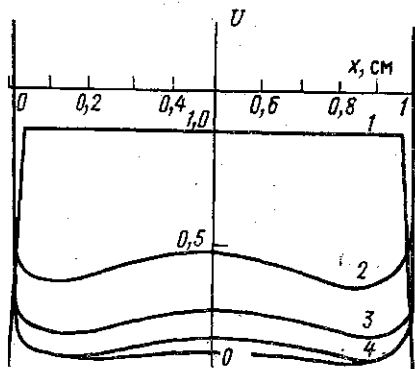


Рис. 2. Динамика распределения концентрации в плоской кювете шириной 1 см при $a_0=100$, $a_1=10$. Значение силы на границе 10^{-12} дин, $t=0$ (1), 2000 (2), 4000 (3) и 6000 с (4)

2. Времена установления равновесного состояния сравнимы или превышают характерные времена процессов измерения физических величин (таких, например, как интегральное поглощение, интенсивность

излучения, степень поляризации), причем значения равновесной концентрации сильно (на несколько порядков) могут различаться в приграничной области и в остальной части объема кюветы (рис. 2). Поэтому в исходных уравнениях на следующем этапе уточнения модели необходимо учитывать нелинейные эффекты, связанные с влиянием концентрации на величину силы F .

ЛИТЕРАТУРА

[1] Агранович В. М., Галанин М. Д. Перенос энергии электронного возбуждения в конденсированных средах. М., 1978. [2] Рыжиков Б. Д., Сенаторова Н. Р. // Опт. и спектр. 1986. 60, № 5. С. 1078. [3] Гегузин Я. Е. // УФН. 1986. 149, № 1. С. 149. [4] Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., 1973. [5] Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.

Поступила в редакцию
26.04.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

УДК 530.145

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРОБНОГО КВАНТОВОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ВРЕМЕНИ ИЗМЕРЕНИЯ

Е. К. Слива, Ф. Я. Халили

(кафедра молекулярной физики и физических измерений)

Найдена предельная чувствительность пробного квантового осциллятора при слежении за его координатой в течение заданного ограниченного времени. Построена соответствующая процедура оптимального выделения сигнала из квантовых шумов измерителя координаты.

Одним из основных выводов квантовой теории измерений является наличие так называемого стандартного квантового предела чувствительности (СКП) [1]. Он определяет величину классической силы $F(t)$, обнаружимой по отклику квантовой пробной системы, при непрерывном слежении за координатой последней. В частности, для гармонического осциллятора стандартный квантовый предел имеет вид

$$F\tau_F \geq \sqrt{m\omega_0\hbar}, \quad (1)$$

где F — амплитуда силы, τ_F — ее длительность, m — масса осциллятора, ω_0 — его собственная частота, \hbar — постоянная Планка. Подчеркнем, что наличие СКП свойственно ограниченному классу измерителей (отслеживающих координату пробного объекта). Предложен ряд методов измерения, свободных от СКП (см. обзор [2]), однако их практическая реализация весьма сложна, и для всех используемых в настоящее время датчиков малых сил СКП является принципиальным пределом.

Формула (1) справедлива в предположении, что время выделения сигнала τ бесконечно. Очевидно, что реально оно всегда ограничено сверху. В частности, для уменьшения влияния тепловых флуктуаций должно выполняться неравенство [3]

$$\tau \ll \tau^*, \quad (2)$$

где τ^* — время релаксации пробной системы.