

должны проводиться с равным количеством жидкостей при прочих равных условиях.

На рис. 2 представлена зависимость вязкости воды от температуры. Кривая построена по табличным данным монографии [8], точками отмечены экспериментальные значения. Для получения такой зависимости кювета заполнялась водой при $t=60^{\circ}\text{C}$ и через $\Delta t=5^{\circ}\text{C}$ проводились измерения U^{th} , перед каждым измерением вода перемешивалась. Экспериментальное значение, полученное при $t=15^{\circ}\text{C}$, совмещалось с соответствующей точкой кривой $v=v(t)$. Как видно, в пределах ошибки (5%) экспериментальные значения v совпадают с табличными, полученными другими методами. Основной вклад в погрешность измерений вносит неточность, связанная с определением размеров области возбуждения l ($3+4\%$).

Измерение вязкостей жидкостей более плотных и вязких, чем вода, лимитируется мощностью используемого динамика в данном диапазоне частот. Для определения абсолютного значения v требуется измерить амплитуду синфазных колебаний поверхности жидкости на частоте накачки, что может быть реализовано, например, с помощью оптического метода [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зарембо Л. К., Красильников В. А., Тхай Тхань Лонг//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1969. № 6. С. 121. [2] Воронин В. П. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. (МГУ), 1972. [3] Garrett C. J. R.//J. Fluid Mech. 1970. 41. P. 837. [4] Гончаров В. В., Наугольных К. А., Рыбак С. А.//Изв. АН СССР, ФАО. 1977. 13, № 4. С. 431. [5] Езерский А. Б., Рабинович М. И. и др.//ЖЭТФ. 1986. 91, № 6. С. 2070. [6] Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л., 1980. [7] Львов В. С. Нелинейные спиновые волны. М., 1987. [8] Барр Г. Вискозиметрия. М.; Л., 1938.

Поступила в редакцию
06.04.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

УДК 534.26

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ МОДЫ КВАДРАТИЧНОГО ТВЕРДОГО КЛИНА

В. В. Крылов

(кафедра акустики)

С помощью геометро-акустического подхода показано, что вдоль вершины твердотельного клина, локальная толщина которого квадратичным образом зависит от его высоты, могут распространяться сосредоточенные вблизи вершины антисимметричные акустические колебания. Фазовые скорости этих колебаний характеризуются немонотонными зависимостями от частоты и могут быть сделаны сколь угодно малыми при стремлении высоты усечения клина к нулю.

Известно, что вдоль линии пересечения двух плоских граней твердотельного клина могут распространяться антисимметричные локализованные акустические колебания, фазовые скорости которых не зависят от частоты [1, 2]. В общем случае произвольных углов раскрытия клина θ эти квазиизгибные колебания, называемые также клиновыми акустическими волнами, поддаются рассмотрению лишь численными методами. Однако в наиболее интересном случае остроугольного кли-

на возможны приближенные аналитические подходы, в том числе основанные на методах геометрической акустики [3—5]. Важным преимуществом геометрических, или лучевых, методов является то обстоятельство, что они позволяют описывать локализованные моды также и в более сложных твердотельных структурах, расчет которых численными методами весьма проблематичен [4, 6, 7].

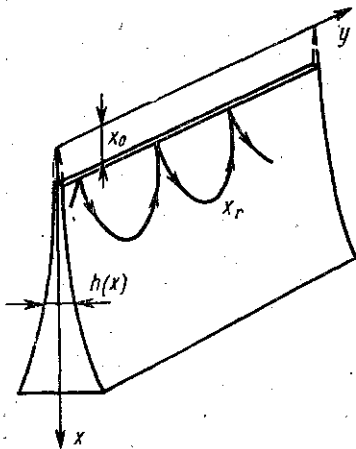


Рис. 1

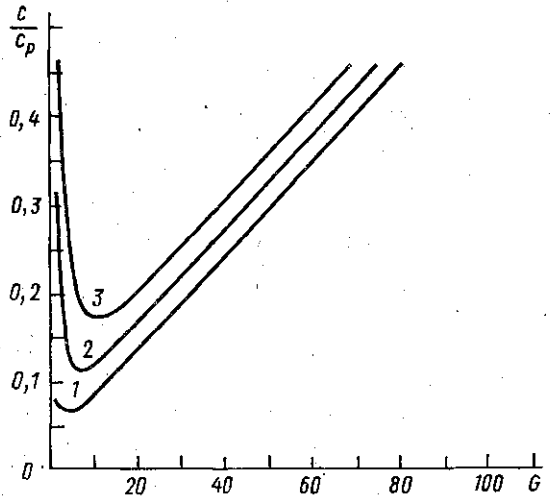


Рис. 2

Рис. 1. Геометрия задачи: $h(x) = \epsilon x^2$

Рис. 2. Зависимости нормированных скоростей трех низших локализованных мод квадратичного твердого клина от безразмерного параметра $G = (2\sqrt{3}\omega/\epsilon c_p)^{1/2}$. Расчеты выполнены для $\epsilon x_0/2\sqrt{3} = 0,005$

В настоящей работе мы проанализируем с помощью геометро-акустического подхода локализованные колебания так называемого квадратичного твердого клина (рис. 1), локальная толщина которого $h(x)$ задается функцией $h = \epsilon x^2$. Вершину клина в общем случае будем считать усеченной, с высотой усечения x_0 . Случай квадратичного клина представляется интересным по двум причинам. Во-первых, он открывает новые возможности управления свойствами локализованных мод за счет незначительных изменений одного из параметров клина, что может найти разнообразные практические применения, например в акустоэлектронике или в ультразвуковой дефектоскопии. Во-вторых, как было впервые отмечено в работе [8], для изгибных колебаний квадратичного твердого клина приближение геометрической акустики при определенных условиях справедливо для любых значений x в отличие от традиционного «линейного» клина, в котором лучевой подход теряет смысл вблизи ребра [3, 4]. Данное полезное свойство квадратичного клина позволяет надеяться на достаточно точное описание локализованных колебаний для мод любых порядков.

При анализе локализованных антисимметричных колебаний квадратичного клина будем исходить из общего двумерного уравнения

гармонических изгибных колебаний тонкой пластинки переменной толщины (см., напр., [3, 4])

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2(1-\sigma) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[D(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D(x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] - \omega^2 \rho h(x) w = 0. \quad (1)$$

Здесь w — нормальное смещение срединной плоскости пластинки, $D(x) = Eh^3(x)/12(1-\sigma^2)$ — локальная изгибная жесткость, $h(x)$ — локальная толщина пластинки (клина), E и σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины, ρ — ее плотность, ω — круговая частота.

В соответствии с геометро-акустическим подходом решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w = A(x) \exp[ik_p S(x, y)], \quad (2)$$

где $A(x)$ и $S(x, y) = \tilde{S}(x) + (\beta/k_p)y$ — медленно меняющиеся амплитуда и эйконал волны, β — проекция ее волнового вектора на ось y , $k_p = \omega/c_p$ — волновое число квазипродольной волны в тонкой пластинке, c_p — ее фазовая скорость. Подстановка (2) в (1) и приравнивание к нулю действительной части дает в главном приближении уравнение эйконала [3]

$$|\nabla S(x, y)|^2 = \frac{k_a^4(x)}{k_p^4} = n_a^4(x). \quad (3)$$

Здесь $k_a(x) = (2\sqrt{3}k_p/h(x))^{1/2}$ — локальное волновое число плоской изгибной волны в пластинке. Решение уравнения (3) для распространяющихся волн дает

$$\tilde{S}(x) = \pm \frac{1}{k_p} \int [k_a^2(x) - \beta^2]^{1/2} dx. \quad (4)$$

Приравнивание к нулю мнимой части приводит к уравнению переноса, определяющему закон изменения амплитуды $A(x)$. Это уравнение достаточно громоздко и имеет различный вид для каждой конкретной зависимости $h(x)$. Для случая линейного клина ($h(x) = \theta x$) это уравнение выписывалось и решалось в работе [4]. Заметим также, что функция $A(x)$ может быть определена и из закона сохранения энергии изгибной волны в различных сечениях клина $x = \text{const}$ [4]. В рассматриваемом ниже случае $h(x) = \epsilon x^2$ мы будем интересоваться только дисперсионными зависимостями локализованных акустических мод, не анализируя их амплитудную структуру. Поэтому уравнение переноса, так же как и запись закона сохранения энергии, здесь для краткости не приводится.

Анализ применимости геометро-акустических соотношений (3), (4), проведенный в соответствии со строгой методикой [3], показывает, что выражения (3), (4) справедливы для всех x при выполнении условия

$$G = (2\sqrt{3}k_p/\epsilon)^{1/2} \gg 1, \quad (5)$$

что согласуется с результатом, полученным другим способом в работе [8].

Считая далее, что условие (5) соблюдается, перейдем к анализу интересующих нас локализованных изгибных колебаний. Согласно [3, 4], в геометро-акустическом приближении волновые числа мод таких колебаний зависят от набега фазы $\Psi_x = k_p \tilde{S}(x)$ между отражениями луча от ребра и от простой акустики, соответствующей точкам поворота луча, и определяются из условия

$$\int_{x_0}^{x_r} [k_a^2(x) - \beta^2]^{1/2} dx = \pi n. \quad (6)$$

Здесь x_0 — высота усечения клина; x_r — координата точек поворота луча, соответствующая обращению в нуль выражения в квадратных скобках (6); n принимает значения 1, 2, 3... Подставляя значение $k_a^2(x)$ в случае квадратичного клина: $k_a^2(x) = 2\sqrt{3}k_p/\epsilon x^2$ в (6) и проводя интегрирование, получим после простых преобразований следующее алгебраическое уравнение для определения скорости клиновых волн $c = \omega/\beta$:

$$\ln \left[z \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} \right) \right] - \sqrt{1 - \frac{1}{z^2}} = \frac{\pi n}{G}, \quad (7)$$

где введено обозначение $z = (2\sqrt{3}/\epsilon x_0 G)(c/c_p)$. Напомним, что в приближении геометрической акустики величина $G = (2\sqrt{3}k_p/\epsilon)^{1/2}$ должна удовлетворять условию (5). Определив значения c из (7), по аналогии с работами [3, 4] нетрудно найти и распределения амплитуд поля рассматриваемых волн $W(x)$ в направлении, перпендикулярном направлению распространения. В частности, легко показать, что $W(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, как и должно быть в случае локализованных волн. Как уже отмечалось выше, мы не будем здесь останавливаться на обсуждении этого вопроса, интересуясь только скоростными характеристиками локализованных волн в рассматриваемом квадратичном клине.

Найдем сначала приближенные аналитические решения уравнения (7) в двух предельных случаях: для $z \gg 1$, соответствующих не слишком большим значениям G (но тем не менее $G \gg 1$) и (или) достаточно большим по сравнению с единицей значениям n ; и для $z \gtrsim 1$, соответствующих большим G и малым n . В первом случае ($z \gg 1$) решение (7) имеет вид

$$z = \frac{1}{2} \exp \left(1 + \frac{\pi n}{G} \right), \quad (8)$$

откуда для нормированных скоростей локализованных клиновых мод имеем

$$\frac{c}{c_p} = \frac{\epsilon x_0}{4\sqrt{3}} G \exp \left(1 + \frac{\pi n}{G} \right). \quad (9)$$

Во втором случае ($z \gtrsim 1$) решение (7) принимает форму

$$z = 1 + \frac{\pi n}{G} \quad (10)$$

и выражение для скорости имеет вид

$$\frac{c}{c_p} = \frac{\epsilon x_0}{2\sqrt{3}} G \left(1 + \frac{\pi n}{G} \right). \quad (11)$$

Очевидно, формула (9) сначала описывает убывание величины c/c_p с увеличением G до ее минимальных значений при $G=\pi n$, а затем линейный рост c/c_p с ростом G . Выражение (11), как нетрудно видеть, описывает линейное возрастание c/c_p в зависимости от G . Интересно отметить, что значения c/c_p всегда пропорциональны безразмерному параметру ϵx_0 и, в частности, стремятся к нулю при $x_0 \rightarrow 0$. Данное обстоятельство представляется весьма важным для практики, так как оно открывает широкие возможности для управления скоростями локализованных волн в квадратичном клине за счет даже небольших вариаций высоты усечения x_0 .

В общем случае произвольных (но больших) G уравнение (7) целесообразно решать численно. Графики зависимостей c/c_p от G для первых трех мод, полученные в результате численного решения уравнения (7) методом деления отрезка пополам, приведены на рис. 2 для значения параметра $\epsilon x_0/2\sqrt{3}$, равного 0,005. Нетрудно видеть, что ход построенных дисперсионных кривых хорошо согласуется с приближенными аналитическими зависимостями (9) и (11). В соответствии с (11) при $G \rightarrow \infty$ фазовые скорости всех клиновых мод неограниченно растут с увеличением частоты $\omega = k_p c_p$ и стремятся к фазовой скорости плоской изгибной волны в пластинке постоянной толщины $h_0 = \epsilon x_0^2$:

$$\frac{c}{c_p} = \left(\frac{k_p \epsilon x_0^2}{2\sqrt{3}} \right)^{1/2}. \quad (12)$$

В действительности, однако, большие значения c/c_p не реализуются, так как скорости клиновых волн c , так же как и скорость плоской изгибной волны в пластине, не могут превысить скорость поверхностной акустической волны Рэлея $c_R \approx c_p/\sqrt{3}$. Формально данное обстоятельство характеризуется тем, что исходное уравнение изгибных колебаний тонкой пластины (1) справедливо только для локальных толщин клина $h = \epsilon x^2$, существенно меньших длины рэлеевской волны $\lambda_R = 2\pi c_R/\omega$. Таким образом, приведенный выше расчет скоростей локализованных антисимметричных мод квадратичного клина ограничен такими значениями G , при которых характерная глубина локализации мод, оцениваемая значением координаты точки поворота x_r , меньше $(\lambda_R/\epsilon)^{1/2}$. Так как, согласно (6), координата точки поворота определяется равенством $x_r = (2\sqrt{3}/\epsilon k_p)^{1/2} (c/c_p)$, то упомянутое ограничение на G сверху в неявной форме принимает вид

$$c/c_p \leq 1, \quad (13)$$

что по порядку величины согласуется с упомянутым ранее физически достижимым пределом $c/c_R \leq 1$. Значения c при $G \rightarrow 0$, очевидно, тоже не могут быть больше c_R . Однако в этом случае приближение геометрической акустики перестает быть справедливым и ограничение на G снизу является просто следствием неравенства (5), не связанного с ограничением на c .

Отметим, что рассчитанные выше частотные зависимости фазовых скоростей локализованных акустических мод в квадратичном твердом клине очень похожи на частотные зависимости фазовых скоростей локализованных антисимметричных колебаний, распространяющихся вдоль тонкого прямоугольного выступа, расположенного на поверхности упругого полупространства из того же материала (гребенчатого волновода) [2, 9]. Такого рода структуры ранее рассчитывались численными методами применительно к их использованию в качестве то-

пографических волноводов для поверхностных акустических волн. Так же, как и в рассмотренном случае квадратичного усеченного клина, фазовые скорости локализованных мод гребенчатого волновода сначала уменьшаются с возрастанием частоты (следует иметь в виду, что в работах [2, 9] соответствующие кривые построены в зависимости от параметра $B = \omega a / 2\pi c_p$, где a — толщина выступа, а не от $G = (2\sqrt{3}\omega/\epsilon c_p)^{1/2}$, как в настоящей работе), а затем растут, стремясь к скорости плоской изгибной волны в пластинке толщиной a . Физически такое схожее поведение вполне понятно, так как влияние упругого полупространства, изгибную жесткость которого можно формально положить равной бесконечности, на выступающий над ним тонкий прямоугольный выступ в определенной мере аналогично влиянию утолщенной части квадратичного клина на его более податливый участок.

Таким образом, в работе показано, что в усеченном квадратичном твердом клине могут существовать локализованные вблизи вершины антисимметричные акустические моды, обладающие дисперсией. Фазовые скорости всех этих мод пропорциональны безразмерному параметру ϵx_0 , описывающему геометрию клина, и могут быть сделаны сколь угодно малыми в результате уменьшения высоты усечения x_0 . Особенности дисперсионных характеристик рассмотренных мод, в частности области возрастания или убывания фазовой скорости, равно как и квазиплоские участки, соответствующие положению скоростных минимумов, могут использоваться на практике, например при разработке акустоэлектронных устройств с низкой скоростью звука, а также для физического моделирования различных волновых процессов с дисперсией.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Moss S. L., Maradudin A. A., Cunningham S. L. // *Phys. Rev.* 1973. В 8, N 6. P. 2999. [2] Lagasse P. E., Mason I. M., Ash E. A. // *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics.* 1973. 20, N 2. P. 143. [3] Крылов В. В. // *Акуст. журн.* 1989. 35, № 2. С. 294. [4] Крылов В. В. // *ЖТФ.* 1990. 60, № 2. С. 1. [5] Можяев В. Г. // *Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.* 1989. 30, № 5. С. 40. [6] Krylov V. V. // *Progr. in Surf. Sci.* 1989. 32, N 1. P. 39. [7] Krylov V. V. // *Proc. Ext. Abstr. 2nd Intern. Symp. «Surface Waves in Solids and Layered Structures».* Varna (Bulg.), 1989. V. 1. P. 63. [8] Мионов М. А. // *Акуст. журн.* 1988. 34, № 3. С. 546. [9] Олинер А. // *Поверхностные акустические волны* / Под ред. А. Олинера. М., 1981. С. 226.

Поступила в редакцию
16.04.90