КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145.6

СИНГУЛЯРНЫЙ КВАНТОВЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В. Б. Гостев, А. Р. Френкин

(кафедра теоретической физики)

Рассмотрено заново стационарное уравнение Шрёдингера для осциллятора с возмущением λx^{-2}. На основе требования автомодельности решения уравнения Шрёдингера для свободной частицы с тем же возмущением сделан новый выбор четных состояний сингулярного осциллятора. Предложенное решение в отличие от ортодоксального обеспечивает чередование четных и нечетных уровней и устойчивость основного состояния и, следовательно, является физически предпочтительным.

Сингулярным осциллятором мы называем систему с гамильтонианом ($\hbar=2m=\omega/2=1$)

$$H=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+s(s+1)x^{-2},\quad -\infty<x<\infty,\quad -1/2<s<1/2. \tag{1}$$

Ограничение на s связано с существованием при $s<1/2$ двух квадратично интегрируемых на $(0,a)$, $a>0$, независимых решений стационарного уравнения Шрёдингера (УШ) с гамильтонианом (1) [1], вещественность обеспечивает отсутствие падения на центр.

Несмотря на то что УШ (1) изучалось очень давно и имеет точные решения [2], вопрос о выборе четных решений УШ до сих пор обсуждается в литературе. Нечетные же эквидистантные уровни и волновые функции, совпадающие с радиальными, принимаются всеми авторами без сомнений и разногласий.

Ортодоксальным является выбор в качестве четного решения УШ (1) четно продолженного на $(-\infty, 0)$ нечетного решения [3—5]. Он приводит к двукратному вырождению уровней энергии по четности. Этот выбор проводится (явно или неявно) путем обрезания сингулярности и последующего снятия регуляризации. Однако эта процедура некорректна (в отличие от нечетного случая), так как матричный элемент сингулярного возмущения расходится на четных регуляризованных функциях (и сходится на нечетных).

Сомнения в правильности ортодоксального выбора высказывались давно [6]. В работах [7, 1] были перечислены все самосопряженные расширения гамильтониана с особенностью (1) на $(0, \infty)$. В работах [1, 8, 9] были указаны физические аргументы в пользу одного из расширений в качестве четного решения.

В настоящей заметке мы даем, на наш взгляд, логически завершенный выбор четного решения для сингулярного осциллятора.

Прежде всего отметим, что граничное условие ($x\to+0$) для сингулярности $W=s(s+1)x^{-2}$ при четном несингулярном потенциале $V(x)$ не должно зависеть от вида $V(x)$ и обеспечивать самосопряженность гамильтониана типа (1) (вместе с условием при $x\to+\infty$). Перечислим все такие условия [1], зависящие от одной непрерывной функции $h(s)$ $(-1/2\leqslant s\leqslant 1/2)$:

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{(2s+1)\,x^{2s}}\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}-\frac{s}{x}\right)=h(s). \tag{2}$$

Условие (2) для «нормировки» $\psi(x)$ дополняется соотношением

$$\lim_{x\to+0}x^{s}\psi(x)=1. \tag{3}$$

При любых функциях $h(s)$ имеет место чередование четных и нечетных уровней. Вырождение осуществляется только при $h(s)\to+\infty$ и описывается особым граничным условием [1] ($h(s)\to-\infty$ не соответствует никакому самосопряженному расширению гамильтониана (1) и приводит к падению «на дно» основного уровня и вырождению остальных [10]).

Требование того, чтобы при выключении сингулярного возмущения (1) четные решения УШ (1) переходили в четные осцилляторные функции, приводит к слабому ограничению

$$h(0)=0. \tag{4}$$

Для извлечения дополнительной информации о функции $h(s)$ (2) используем следующий прием. Рассмотрим УШ с потенциалом с более слабой особенностью $W(x)=\lambda|x|^{-\nu}$, $-\infty<\lambda<\infty$, $0\leqslant\nu<2$, $-\infty<x<\infty$. В случае когда $V(x)=0$, это УШ имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}-\lambda|x|^{-\nu}\psi+E\psi=0 \tag{5}$$

(E — энергия стационарного состояния) и фактически зависит (ν фиксировано) от одного параметра, так как заменой переменной $z=|\lambda|^{1/(2-\nu)}x$ оно обезразмеривается:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2}\mp|z|^{-\nu}\psi+\varepsilon\psi=0,\quad \varepsilon=E\,|\lambda|^{-2/(2-\nu)}.$$

Размерности величин таковы: $[x]=1$, $[E]=-2$, $[\lambda]=-(2-\nu)$, $[\nu]=[z]=[s]=[\varepsilon]=0$. Поэтому кажется естественным потребовать автомодельность поведения физических величин — уровней энергии $\varepsilon_n(\nu)=E_n|\lambda|^{-2/(2-\nu)}$ — и коэффициента прохождения через барьер (яму) (5)

$$T(\lambda,\ E)=T(t), \tag{6}$$

$$t=\lambda E^{-(2-\nu)/2}, \tag{7}$$

где t — безразмерный ($[t]=0$) параметр. Именно такая зависимость имеет место для нечетных уровней при произвольном $0<\nu<2$ и для четных уровней и коэффициента прохождения в одномерном кулоновском поле [8, 11] и поле $W=\lambda\delta(x)$ [12]. Совершая в формулах (7), (6) предельный переход $\nu\to2-0$, получим с учетом того, что при $\nu=2$ $\lambda=s(s+1)$, независимость коэффициента прохождения от энергии при $\nu=2$ (5):

$$T(E,\ s)=T(t)=T(s). \tag{8}$$

Зависимость коэффициента прохождения $T(E,\ s,\ h(s))$ для барьера (ямы) $W=s(s+1)x^{-2}$ была исследована в [7] ($s>0$, неявная зависимость от $h(s)$), [8] ($-1/2<s<1/2$, произвольная $h(s)$). Из результатов статьи [8] следует, что $dT/dE=0$ ($T(s)=\cos^2(s\pi)$) только при

$$h(s)=0. \tag{9}$$

Значит, и для осциллятора с гамильтонианом (1) физически предпочтительными являются четные функции, удовлетворяющие при $x\to+0$ граничным условиям (2), (9). Такие функции находятся из требования нормируемости $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2(x)\,dx=1\right)$ и имеют вид [6, 1]

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{\Gamma(n+1/2-s)}}{\Gamma(1/2-s)\sqrt{n!}}F(-n,\ 1/2-s,\ x^2)\,|x|^{-s}\exp\{-x^2/2\},$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{10}$$

$F(a,\ b,\ z)$ — регулярная при $z=0$ вырожденная гипергеометрическая функция, вырождающаяся в нашем случае ($a=-n$) в полином степени $2n$.

Четные уровни энергии эквидистантны (только при условии (2), (9) [1]):

$$E_n=4n+1-2s. \tag{11}$$

Выбору (9) соответствует автоматически включающийся точечный потенциал [1]

$$U=-2s|x|^{-1}\delta(x). \tag{12}$$

Наконец, в качестве подарка мы вместе с эквидистантностью (1) получаем реализуемость на четных волновых функциях (10), (11) внутренней симметрии гамильтониана

(1) [5] в смысле [13]: волновые функции четных состояний (10) получаются путем последовательного действия на основное состояние генераторов группы $SU(1,1)$, одним из которых является гамильтониан (1) [9]. Аналогичное положение справедливо и для нечетных уровней, но здесь используются другое представление группы $SU(1,1)$ и основное нечетное состояние [5]. При любом другом выборе четных состояний ((2) $h(s)\neq 0$) эквидистантность уровней (11) и реализуемость внутренней симметрии гамильтониана (1) на четных состояниях сингулярного осциллятора не имеют места. Симметрия нарушается в граничных условиях (2). Это нарушение проявляется через видоизменение точечного потенциала (12) (добавляется слагаемое $2h(s)(2s+1)|x|^{2s}\delta(x)[1]$).

Таким образом, нами указан физически обоснованный выбор четных состояний сингулярного осциллятора (1). Граничные же условия (2), (3), дополненные условиями для нечетных функций ($x\to -0$), превращаются в правило продолжения решений УШ через сингулярность λx^{-2}, которое дает возможность решения любой одномерной задачи квантовой механики для потенциала с особенностью (1) и произвольным (необязательно четным) гладким потенциалом $V(x)$ вопреки утверждению о невозможности продолжения решения УШ через точку с такой особенностью [14]. Эти задачи имеют многочисленные физические приложения [7]. Обобщение на случай более слабой особенности (5) нетривиально и будет рассмотрено отдельно.

Авторы благодарны Н. А. Свешникову за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р.//ТМФ. 1986. 68. С. 45. [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1989. С. 158. [3] Гольдман И. Н., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М., 1957. [4] Calogero F.//J. Math. Phys. 1969. 10. P. 2191. [5] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применение. М., 1987. С. 164—175. [6] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., 1979. С. 109. [7] Dittrich I., Exner P.//J. Math. Phys. 1985. 26. P. 2000. [8] Гостев В. Б., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 3. С. 85. [9] Гостев В. Б., Френкин А. Р.//Изв. вузов, Физика. 1989. № 10. С. 85. [10] Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. 29, № 5. С. 9. [11] Гостев В. Б., Перес-Фернандес В. К., Френкин А. Р., Чижов Г. А.//Там же. 1989. 30, № 4. С. 22. [12] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960. Т. 2. С. 595—596. [13] Додонов В. В., Манько В. И.//Тр. ФИАН. 1987. 183. С. 3. [14] Шадан П., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980. С. 113.

Поступила в редакцию
24.05.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.171.016

ЕДИНОЕ ОПИСАНИЕ РАССЕЯНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОМЕРНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

А. М. Попова, А. В. Харченко

(кафедра физики атомного ядра)

Представлена модель единого описания высокоэнергетического рассеяния как на малые, так и на большие углы. Рассчитана амплитуда рассеяния для локального потенциала в форме Гаусса. Результаты хорошо согласуются с точной амплитудой рассеяния и с эйкональным приближением.

Как показано в работах [1, 2], при высоких энергиях и гладком рассеивающем потенциале амплитуда рассеяния на малые углы с хорошей точностью воспроизводится в эйкональном приближении. В работах [3, 4] было предложено приближение для амплитуды рассеяния на большие углы. Однако в настоящее время не существу-