

(1) [5] в смысле [13]: волновые функции четных состояний (10) получаются путем последовательного действия на основное состояние генераторов группы $SU(1, 1)$, одним из которых является гамильтониан (1) [9]. Аналогичное положение справедливо и для нечетных уровней, но здесь используются другое представление группы $SU(1, 1)$ и основное нечетное состояние [5]. При любом другом выборе четных состояний (2) $\hat{h}(s) \neq 0$, эквидистантность уровней (11) и реализуемость внутренней симметрии гамильтониана (1) на четных состояниях сингулярного осциллятора не имеют места. Симметрия нарушается в граничных условиях (2). Это нарушение проявляется через видоизменение точечного потенциала (12) (добавляется слагаемое $2h(s)(2s+1)|x|^{2s}\delta(x)[1]$).

Таким образом, нами указан физически обоснованный выбор четных состояний сингулярного осциллятора (1). Граничные же условия (2), (3), дополненные условиями для нечетных функций ($x \rightarrow -0$), превращаются в правило продолжения решений УШ через сингулярность λx^{-2} , которое дает возможность решения любой одномерной задачи квантовой механики для потенциала с особенностью (1) и произвольным (необязательно четным) гладким потенциалом $V(x)$ вопреки утверждению о невозможности продолжения решения УШ через точку с такой особенностью [14]. Эти задачи имеют многочисленные физические приложения [7]. Обобщение на случай более слабой особенности (5) нетривиально и будет рассмотрено отдельно.

Авторы благодарны Н. А. Свешникову за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гостев В. Б., Минеев В. С., Френкин А. Р. // ТМФ. 1986. 68. С. 45.
 [2] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., 1989. С. 158.
 [3] Гольдман И. Н., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М., 1957. [4] Calogero F. // J. Math. Phys. 1969. 10. P. 2191. [5] Переломов А. М. Обобщенные когерентные состояния и их применение. М., 1987. С. 164—175. [6] Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М., 1979. С. 109. [7] Dittrich I., Exner P. // J. Math. Phys. 1985. 26. P. 2000. [8] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 3. С. 85. [9] Гостев В. Б., Френкин А. Р. // Изв. вузов, Физика. 1989. № 10. С. 85. [10] Гостев В. Б., Гостев И. В., Френкин А. Р. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. 29, № 5. С. 9. [11] Гостев В. Б., Перес-Фернандес В. К., Френкин А. Р., Чижов Г. А. // Там же. 1989. 30, № 4. С. 22. [12] Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., 1960. Т. 2. С. 595—596. [13] Додонов В. В., Манько В. И. // Тр. ФИАН. 1987. 183. С. 3. [14] Шадан П., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., 1980. С. 113.

Поступила в редакцию
24.05.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

УДК 539.171.016

ЕДИНОЕ ОПИСАНИЕ РАССЕЯНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОДНОМЕРНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА

А. М. Попова, А. В. Харченко

(кафедра физики атомного ядра)

Представлена модель единого описания высокоэнергетического рассеяния как на малые, так и на большие углы. Рассчитана амплитуда рассеяния для локального потенциала в форме Гаусса. Результаты хорошо согласуются с точной амплитудой рассеяния и с эйкональным приближением.

Как показано в работах [1, 2], при высоких энергиях и гладком рассеивающем потенциале амплитуда рассеяния на малые углы с хорошей точностью воспроизводится в эйкональном приближении. В работах [3, 4] было предложено приближение для амплитуды рассеяния на большие углы. Однако в настоящее время не существу-

ет единого описания рассеяния при больших энергиях на углы, близкие к $\theta=0^\circ$ и к $\theta=180^\circ$.

Представленная нами модель, основанная на уравнении Липпмана—Швингера с одномерным пропагатором, впервые позволяет получить в хорошем приближении единое описание высокоэнергетического рассеяния как на малые, так и на большие углы. А в области углов $\theta=40-100^\circ$ результаты нашего приближения качественно совпадают с точной амплитудой $f(\theta)$, рассчитанной на основе численного решения уравнения Шрёдингера для парциальных компонент волновой функции.

Условия применимости нашей модели совпадают с условиями применимости эйконального приближения:

$$k_0 R \gg 1, \quad V_0/\varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

где k_0 — относительный импульс, ε — энергия относительного движения, V_0 и R — величина и радиус действия потенциала.

Рассмотрим нерелятивистское рассеяние двух частиц, взаимодействие которых описывается потенциалом V . Амплитуда упругого рассеяния

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2\pi} \langle \mathbf{k} | t(\varepsilon) | \mathbf{k}' \rangle \quad (2)$$

определяется решением уравнения Липпмана—Швингера для оператора перехода $t(\varepsilon)$:

$$t(\varepsilon) = V + V g_0(\varepsilon) t(\varepsilon). \quad (3)$$

Здесь \mathbf{k}' и \mathbf{k} — начальный и конечный импульсы рассеивающейся частицы, $|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}| = k_0$; $g_0(\varepsilon)$ — свободный оператор Грина; $\varepsilon = k_0^2/(2\mu)$ — энергия относительно движения; μ — приведенная масса частиц; θ — угол рассеяния; $\cos \theta = \widehat{\mathbf{k}'\mathbf{k}}$; $\hbar = 1$.

Обобщим эйкональное приближение. Запрещая по-прежнему в процессе рассеяния распространение свободных волн в поперечных направлениях, будем допускать распространение волн как вперед, так и назад. При этом точный пропагатор в уравнении (3) аппроксимируем пропагатором вида

$$\langle \mathbf{k} | g_0^L(\varepsilon) | \mathbf{k}' \rangle = \frac{(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\varepsilon - k_{\parallel}^2/(2\mu) + i0}. \quad (4)$$

Пропагатор (4) описывает распространение волн в одном измерении, параллельном заданному направлению $\mathbf{n} \uparrow \mathbf{k}_0$. Ось z выбирается вдоль вектора \mathbf{n} . Записанный в импульсном пространстве пропагатор $g_0^L(\varepsilon)$ содержит два полюса в точках $k_{\parallel} = k_0 + i0$ и $k_{\parallel} = -k_0 - i0$. В координатном представлении пропагатор $g_0^L(\varepsilon)$ имеет вид

$$\langle \mathbf{r} | g_0^L(\varepsilon) | \mathbf{r}' \rangle = i \delta^{(2)}(\mathbf{b} - \mathbf{b}') \langle z | \bar{g}_0(\varepsilon) | z' \rangle, \quad (5)$$

$$\langle z | \bar{g}_0(\varepsilon) | z' \rangle = -i \frac{\mu}{k_0} \exp\{ik_0 |z - z'|\},$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{b} + z\mathbf{n}$ — радиус-вектор; \mathbf{b} — его поперечная компонента; $g_0(\varepsilon)$ — свободная функция Грина одномерного движения вдоль линии, параллельной оси z ; k_{\parallel} — проекция вектора \mathbf{k} на ось z .

Заметим, что пропагатор (4) представляет собой сумму двух эйкональных пропагаторов, описывающих распространение волн вдоль одной линии в направлениях вперед и назад.

Соответствующий оператор перехода $t^L(\varepsilon)$ определяется приближенным уравнением Липпмана—Швингера:

$$t^L(\varepsilon) = V + V g_0^L(\varepsilon) t^L(\varepsilon). \quad (6)$$

В настоящей работе мы ограничиваемся случаем локального потенциала $\langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle = V(\mathbf{r}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

После выделения двумерной дельта-функции $\delta^{(2)}(\mathbf{b} - \mathbf{b}')$, содержащейся в выражениях для g_0^L и V , уравнение (6) приводится к одномерному. При этом $\langle \mathbf{r} | t^L(\varepsilon) | \mathbf{r}' \rangle = \delta^{(2)}(\mathbf{b} - \mathbf{b}') \langle z | \bar{t}(\varepsilon; \mathbf{b}) | z' \rangle$. Величина $\langle z | \bar{t}(\varepsilon; \mathbf{b}) | z' \rangle$ представляет собой матрицу перехода для одномерного движения вдоль линии, параллельной оси z , с прицельным параметром b . Она удовлетворяет одномерному уравнению Липпмана—Швингера

$$\bar{t}(\varepsilon, b) = V(b) + V(b) \bar{g}_0(\varepsilon) \bar{t}(\varepsilon, b), \quad (7)$$

где $\langle z | V(b) | z' \rangle = V(\sqrt{z^2 + b^2}) \delta^{(1)}(z - z')$.

В импульсном пространстве матрица перехода $t^L(\varepsilon)$ выражается через матрицу перехода для одномерного движения $t(\varepsilon, b)$ с помощью интегрирования по параметру b :

$$\langle \mathbf{k} | t^L(\varepsilon) | \mathbf{k}' \rangle = \int_0^b 2\pi b db J_0(q_{\perp} b) \langle k_{\parallel} | \bar{t}(\varepsilon, b) | k'_{\parallel} \rangle, \quad (8)$$

где $J_0(q_{\perp} b)$ — функция Бесселя, $q_{\perp} = k'_{\perp} - k_{\perp}$ — поперечная компонента переданного импульса. Величина $\langle k_{\parallel} | \bar{t}(\varepsilon, b) | k'_{\parallel} \rangle$ находится из интегрального уравнения (7), записанного в импульсном представлении:

$$\langle k_{\parallel} | \bar{t}(\varepsilon, b) | k'_{\parallel} \rangle = \langle k_{\parallel} | V(b) | k''_{\parallel} \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''_{\parallel}}{2\pi i} \langle k_{\parallel} | V(b) | k''_{\parallel} \rangle \frac{\langle k''_{\parallel} | \bar{t}(\varepsilon, b) | k'_{\parallel} \rangle}{\varepsilon - k''_{\parallel}{}^2 / (2\mu) + i0}, \quad (9)$$

где

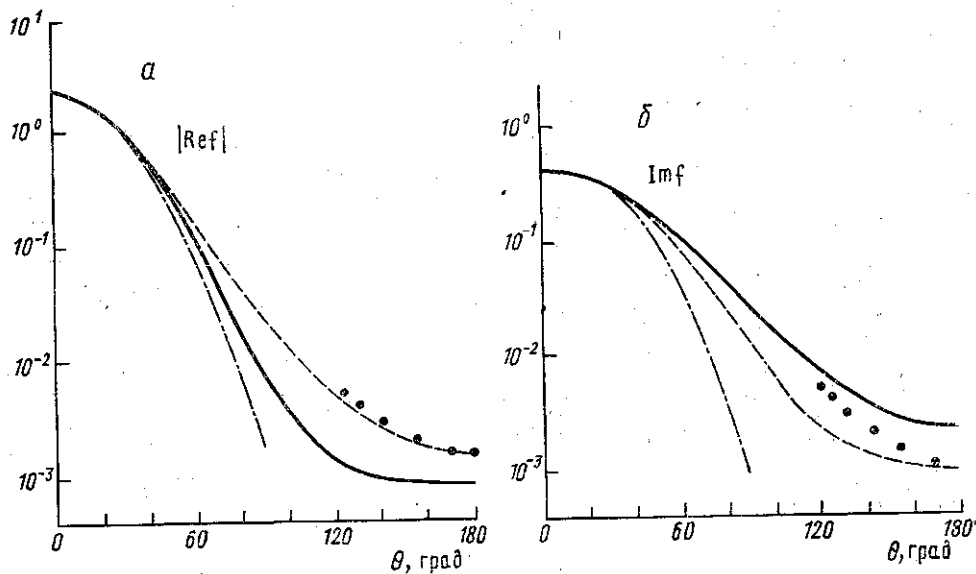
$$\langle k_{\parallel} | V(b) | k'_{\parallel} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\{-i(k_{\parallel} - k'_{\parallel})z\} \cdot V(\sqrt{z^2 + b^2}).$$

В отличие от аналогичного уравнения для парциальной компоненты t -матрицы в случае трехмерного движения ядро уравнения (9) содержит два полюса в симметричных точках $k''_{\parallel} = k_0$ и $k''_{\parallel} = -k_0$.

Формула (8) и уравнение (9) определяют полную матрицу перехода $\langle \mathbf{k} | t^L(\varepsilon) | \mathbf{k}' \rangle$. Выражение для соответствующей амплитуды рассеяния на энергетической поверхности получаем из (2) и (9), выбирая единичный вектор \mathbf{n} (направление оси z) вдоль вектора начального импульса ($\mathbf{k}' = k_0$):

$$f^L(\theta) = -\mu \int_0^{\infty} b \cdot db J_0(q_{\perp} b) \langle k_0 \cos \theta | \bar{t}(\varepsilon, b) | k_0 \rangle. \quad (10)$$

Полученные результаты для действительной и мнимой частей амплитуды рассеяния $f^L(\theta)$ представлены на рисунке. Рассматривалось рассеяние частицы с массой



Действительная (а) и мнимая (б) части амплитуды рассеяния. Сплошная линия — точное решение, штриховая — приближение с одномерным пропагатором, штрихпунктирная — эйкональное приближение. Точки соответствуют расчетам Казакса [4]

и импульсом $k_0 = 2 \text{ Фм}^{-1}$, гауссовым потенциалом $V(r) = V_0 \exp\{-r^2/a^2\}$ с параметрами $2\mu V_0 = 1,0 \text{ Фм}^{-2}$, $a = 1,75 \text{ Фм}$.

Как видно из графиков, в области малых углов соответствующая амплитуда рассеяния $f^L(\theta)$ уточняет эйкональную $f^E(\theta)$. В дополнение к этому $f^L(\theta)$ описывает рассеяние на большие углы и качественно совпадает с точной амплитудой $f(\theta)$. Таким образом, обеспечивая единое описание высокоэнергетического рассеяния на малые и большие углы и строгое аналитическое продолжение матрицы перехода вне энергетической поверхности, модель с одномерным пропагатором представляет несомненный интерес в применении к расчетам малочастичных систем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Glauber R. J. // Lectures in Theoretical Physics. Vol. 1. P. 315. /Eds. W. E. Brittin & L. G. Dunham. Interscience Publishers Inc. N. Y., 1959. [2] Ситенко А. Г. // Укр. физ. журн. 1959. 4, № 2. С. 152. [3] Schiff L. I. // Phys. Rev. 1956. 103. P. 443. [4] Kazaks P. A. // Phys. Rev. 1981. C24. P. 1152.

Поступила в редакцию
17.10.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1990. Т. 31, № 6

РАДИОФИЗИКА

УДК 621.385

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, СВЯЗАННОГО С ЭЛЕКТРОННЫМ ПОТОКОМ

В. И. Канавец, А. С. Нифанов, А. И. Слепков

(кафедра радиофизики)

На основе матричного многомодового метода дан физический анализ собственных волн периодического волновода, нагруженного электронным потоком. Исследованы структуры полей, соответствующие «горячим» модам системы. Показано, что взаимодействие потока и поля в релятивистских черенковских генераторах является многоволновым.

В последнее время большое внимание уделяется СВЧ-генераторам поверхностных и объемных волн черенковского и дифракционного типов на релятивистских электронных потоках [1]. Секции генераторов выполнены в виде участков круглых периодических волноводов большого диаметра, причем взаимодействие потока и поля в них приводит в основном к усилению собственных волн системы. Поэтому представляет интерес исследование постоянных распространения и структуры полей, соответствующих собственным волнам периодического волновода, через который проходит электронный пучок («горячих» мод системы). Результаты исследования могут быть полезны для развития теории релятивистских СВЧ-усилителей.

Целью данной работы было исследование взаимодействия электронного потока и поля на частотах, лежащих вблизи высокочастотной границы основной полосы прозрачности для нижней аксиально-симметричной моды периодического волновода («л»-вид колебаний). Этот диапазон частот используется в релятивистских устройствах черенковского типа, например в генераторах типа ЛОВ—ЛБВ и в генераторах поверхностной волны [1], в многоволновых черенковских генераторах (МВЧГ) [2].

В исследовании используется одна из модификаций метода поперечных сечений [3, 4]. Период электродинамической системы разбивается на участки гладких волноводов сравнения. Вихревое электромагнитное поле разлагается по полной ортонормированной системе функций — модам (в том числе запрядельным) гладких волноводов. Для построения матрицы, описывающей взаимодействие потока и поля на отдельном периоде системы, совместно решаются уравнения возбуждения участка гладкого волновода и линеаризованное уравнение движения переменного (кольцевого в сечении) электронного потока. При скачкообразном изменении радиуса волновода сравнения проводится процедура сшивания, обеспечивающая непрерывность вектора Умова—Пойнтинга. Использование условий периодичности позволяет решать за-