

больше предсказываемого теорией [2, 3]. В заключение заметим, что для цилиндрического зонда длины  $l$  характерный размер области возмущения  $\sim l$  и неравенство (5) записывается как  $\xi = eEl/(kT_e) \ll 1$ . Например, в [6] выполнялось скорее обратное требование ( $\xi > 1$ ), что и обусловило, видимо, значительное (приблизительно на порядок величины) расхождение эксперимента и теории.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Иванов Ю. А., Лебедев Ю. А., Полак Л. С. Методы контактной диагностики в неравновесной плазмохимии. М., 1981. [2] Swift G. D. // Proc. Phys. Soc. 1962. 79. P. 697. [3] Чен Ф. // Диагностика плазмы / Под ред. Р. Хаддлстоуна, С. Леонарда. М., 1967. [4] Мальков М. А. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1985. [5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., 1977. [6] Голубовский Ю. Б., Захарова В. М., Пасункин В. М., Цендин Л. Д. // Физика плазмы. 1981. 7. С. 620.

Поступила в редакцию  
26.03.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1.

УДК 533.9:533.7

## РЕЗОНАНСНОЕ ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ РАССЕЯНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПУЧКОВОЙ ПЛАЗМЕ

М. В. Кузелев, В. А. Панин, А. П. Плотников, А. А. Рухадзе

(кафедра физической электроники)

Исследуется нелинейная динамика резонансного четырехволнового взаимодействия двух волноводных мод с первой и второй гармониками волны плотности заряда релятивистского пучка электронов. Показано, что в случае релятивистских пучков существует такой режим неустойчивости, когда вторая гармоника плотности не возбуждается. Последнее может быть использовано для создания модулированных пучков с заранее заданными свойствами.

Нелинейная динамика процессов рассеяния электромагнитных волн на плотных замагниченных релятивистских пучках электронов сопровождается возбуждением в пучках волн плотности заряда [1—5]. При этом в пучках большой плотности стабилизация амплитуд взаимодействующих волн определяется нелинейностями кубического типа, в которые дают вклад три эффекта: торможение электронного пучка, генерация в нем высших гармоник волны плотности заряда и релятивистский сдвиг частоты, связанный с зависимостью частоты плазменных колебаний электронов от их амплитуды.

В нерелятивистском пределе, когда учитываются только два первых эффекта, существенное влияние на динамику рассеяния оказывает вторая гармоника волны плотности заряда [6]. Отмеченная особенность заметно проявляется для пучковых волн плотности с линейным законом дисперсии, когда вторая гармоника является резонансной и вместо обычного взаимодействия трех волн (двух электромагнитных и пучковой) реализуется четырехволновое взаимодействие двух электромагнитных волн с первой и второй гармониками волны плотности заряда пучка [6]. Четырехволновое взаимодействие реализуется и в случае релятивистских пучков и рассматривается в настоящей работе.

Такое взаимодействие в общем случае для тонкого пучка релятивистских электронов описывается следующими нелинейными уравнениями [7]:

$$\begin{aligned}\frac{d\epsilon_\alpha}{d\tau} &= -v\epsilon_\beta\hat{\rho}\exp\{i\eta_0\tau\}, \\ \frac{d\epsilon_\beta}{d\tau} &= \beta v\epsilon_\alpha\hat{\rho}^*\exp\{-i\eta_0\tau\}, \\ \frac{dy}{d\tau} &= \frac{1}{\mu}\frac{p^2-1}{p^2}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{i}{4}\mu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}(\rho_n\exp\{iny\}-\text{к. с.})+ \\ &+ \frac{v\mu}{4p^3}(\epsilon_\alpha\epsilon_\beta^*\exp\{iy-i\eta_0\tau\}+\text{к. с.}), \\ \hat{\rho} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p^{-3}\exp\{-iy\}dy_0, \\ \rho_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{-iny\}dy_0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $\tau=\Omega_b t$  — безразмерное время ( $\Omega_b$  — ленгмюровская частота электронов пучка);  $y$  — нормированная на длину волны координата электрона пучка;  $p$  — его импульс;  $\epsilon_{\alpha,\beta}$  — безразмерные амплитуды электромагнитных волн;  $\eta_0$  — расстройка, причем в случае  $\eta_0=+1$  реализуется синхронизм с быстрой волной плотности заряда пучка, а при  $\eta_0=-1$  — с медленной. Величина  $\beta$  определяет тип процесса. При  $\beta=+1$  и  $\eta_0=-1$  система уравнений (1) описывает рассеяние с повышением частоты, а при  $\beta=-1$  и  $\eta_0=-1$  — взрывной процесс (последний возможен лишь при замедлении одной из электромагнитных волн, например в плазменном волноводе). Параметр  $v$  определяет связь комбинационной электромагнитной волны с пучковой и обратно пропорционален плотности электронов в пучке, а  $\mu$  — параметр релятивизма. При  $\mu\rightarrow 0$  после замены импульса  $p$  на скорость  $\eta$  ( $p=(1-\mu\eta)^{-1/2}$ ) система (1) переходит в нелинейные уравнения работы [5]. И наконец, коэффициенты  $\alpha_n$  определяются конкретной геометрией задачи, причем из условия обезразмеривания времени  $\tau$  следует, что  $\alpha_1=1$ .

Следуя далее работе [6], будем считать, что параметр

$$v\ll 1.\tag{2}$$

При этом стабилизация процессов рассеяния определяется только кубическими нелинейностями. Для упрощения нелинейных уравнений (1) воспользуемся методом разложения по возмущениям траекторий, который предложен в работе [8], и методом разложения по возмущениям импульса электронов [7].

Представим координату и импульс электрона в виде

$$\begin{aligned}y(\tau, y_0) &= y_0 + W(\tau) + \tilde{y}(y_0, \tau), \\ p(\tau, y_0) &= \langle p(\tau) \rangle + \tilde{p}(y_0, \tau),\end{aligned}\tag{3}$$

где  $W(\tau)$  — смещение, связанное с поступательным движением пучка;  $\langle p(\tau) \rangle$  — средний импульс электрона, а  $\tilde{y}$  и  $\tilde{p}$  — осцилляторные составляющие координаты и импульса, которые удобно разложить в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(y_0, \tau) &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} [b_s(\tau) \exp\{isy_0\} + \text{к. с.}], \\ \tilde{p}(y_0, \tau) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\tau) \exp\{iny_0\} + \text{к. с.}].\end{aligned}\quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в уравнения (1) и проводя соответствующие разложения с точностью до третьего порядка по амплитудам взаимодействующих волн, получим следующую систему нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_\alpha}{d\tau} &= -v\varepsilon_\beta \hat{\rho} \exp\{i\eta_0\tau\}, \\ \frac{d\varepsilon_\beta}{d\tau} &= \beta v\varepsilon_\alpha \hat{\rho}^* \exp\{-i\eta_0\tau\}, \\ \frac{da_1}{d\tau} &= \frac{\mu}{2} \left[ -b_1 + (1-\alpha_2) \left( ib_1^* b_2 + \frac{1}{2} |b_1|^2 b_1 \right) \right] + \\ &+ \frac{v\mu}{2} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* \exp\{iW - i\eta_0\tau\}, \\ \frac{da_2}{d\tau} &= \frac{\mu}{2} \left[ -\alpha_2 b_2 + \frac{i}{2} (\alpha_2 - 1) b_1^2 \right], \\ \frac{db_1}{d\tau} &= \frac{2}{\mu} \left[ a_1 + \frac{3}{8} \mu (|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2) a_1 - \frac{3}{2} a_1^* a_2 + \frac{3}{2} a_1 |a_1|^2 \right], \\ \frac{db_2}{d\tau} &= \frac{2}{\mu} \left[ a_2 - \frac{3}{4} a_1^2 \right], \\ \frac{dW}{d\tau} &= -\frac{1}{4} |\varepsilon_\alpha|^2 + \frac{1}{4} |\varepsilon_{\alpha 0}|^2 - \frac{3}{2\mu} |a_1|^2, \\ \hat{\rho} &= (3a_1 + ib_1) \exp\{-iW\}.\end{aligned}$$

Считая далее, что

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &\rightarrow \varepsilon_\alpha \exp\{-iW/2\}, \quad \varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\beta \exp\{iW/2\}, \\ a_1 &\rightarrow a_1 \exp\{-i\eta_0\tau\}, \quad a_2 \rightarrow a_2 \exp\{-2i\eta_0\tau\}, \\ b_1 &\rightarrow b_1 \exp\{-i\eta_0\tau\}, \quad b_2 \rightarrow b_2 \exp\{-2i\eta_0\tau\},\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  — медленно меняющиеся функции времени, и проводя дальнейшее рассмотрение в условиях синхронизма пучка с медленной волной плотности заряда пучка ( $\eta_0 = -1$ ), получим после исключения величин  $a_1$  и  $a_2$  следующую систему релятивистских нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_\alpha}{d\tau} + \frac{i}{8} (|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2 + \frac{3}{2} \mu |b_1|^2) \varepsilon_\alpha &= i v \varepsilon_\beta \left( 1 + \frac{3}{2} \mu \right) b_1, \\ \frac{d\varepsilon_\beta}{d\tau} + \frac{i}{8} \beta (|\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2 - \frac{3}{2} \mu \beta |b_1|^2) \varepsilon_\beta &= i v \varepsilon_\alpha \left( 1 + \frac{3}{2} \mu \right) b_1^*,\end{aligned}\quad (5)$$

$$\frac{db_1}{d\tau} = i \cdot \frac{3}{4} Q |b_1|^2 b_1 = -\frac{3}{2} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) b_1^* b_2 - \frac{i}{2} v \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^*,$$

$$\frac{db_2}{d\tau} = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) b_1^2,$$

где  $Q = 1 + \frac{3}{8} \mu + \frac{3}{4} \mu^2$ .

Здесь величины  $b_1$  и  $b_2$  имеют смысл амплитуд первой и второй гармоник волны плотности заряда пучка. Кроме этого, при получении уравнений (5) было положено  $\alpha_2 = 4$ , что соответствует линейному закону дисперсии плазменной пучковой волны ( $\Omega_b \sim k$ , где  $k$  — волновое число). В этом случае вторая гармоника волны плотности заряда возбуждается резонансным образом и оказывает существенное влияние на нелинейную динамику процессов рассеяния [6]. Таким образом, система релятивистских уравнений (5) описывает взаимодействие двух электромагнитных волн с первой и второй гармониками плазменной пучковой волны. Отметим, что при  $\mu = 0$  система (5) переходит в нерелятивистские уравнения работы [6].

Полученные уравнения (5) имеют только два первых интеграла энергии:

$$|\varepsilon_\alpha|^2 - |\varepsilon_{\alpha 0}|^2 = 2(|b_1|^2 + 4|b_2|^2),$$

$$|\varepsilon_\beta|^2 - |\varepsilon_{\beta 0}|^2 = -2\beta(|b_1|^2 + 4|b_2|^2)$$

и не имеют достаточного количества фазовых интегралов, а следовательно, не могут быть решены аналитически.

В случае, когда параметр связи  $v = 0$ , последние уравнения системы (5) описывают взаимодействие двух релятивистских плазменных пучковых волн между собой и запишутся следующим образом:

$$\frac{db_1}{d\tau} = i \cdot \frac{3}{4} Q |b_1|^2 b_1 - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) b_1^* b_2, \quad (6)$$

$$\frac{db_2}{d\tau} = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) b_1^2.$$

Решение системы уравнений (6) можно получить при условии  $|b_{10}|^2 \mu^2 \ll 1$ , которое имеет место в реальных случаях. Оно выражается через эллиптические функции:

$$X = X_0 \operatorname{cn}^2(z, p) + \frac{X_0^{3/2}}{2} \frac{Q}{1 + \mu/2} \operatorname{sn}^2(z, p), \quad (7)$$

где

$$X = |b_1|^2, \quad X_0 = |b_{10}|^2, \quad z = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \sqrt{X_0} \tau,$$

$$p = 1 - \frac{\sqrt{X_0}}{2} \frac{Q}{1 + (\mu/2)}.$$

Из приведенных решений (7) следует, что амплитуда первой гармоники  $|b_1|$  с течением времени уменьшается, а второй —  $|b_2|$  — растет. При

$$\tau = \tau_1 = \frac{4}{3(1 + \mu/2) \sqrt{X_0}} \ln \frac{4 \sqrt{1 + \mu/2}}{X_0^{1/4} \sqrt{Q}}. \quad (8)$$

Величина  $|b_1|^2$  имеет минимальное значение  $|b_1|_{\min}^2 = X_0^{3/2} Q / [2(1 + \mu/2)]$ .

Следовательно, в течение времени  $\tau \gg \tau_1$  происходит многократный обмен энергией между первой и второй гармониками волны плотности заряда пучка.

Проведенный анализ уравнений (5) при  $v=0$  дает возможность получить их качественное решение при произвольных значениях  $v$ . Аналогичный подход использовался в работе [6] при исследовании нерелятивистских уравнений (5). Из системы (5) видно, что на начальной стадии процесса, когда волну накачки  $|\varepsilon_\beta|$  можно считать фиксированной, инкремент неустойчивости  $\delta \sim v|\varepsilon_{\beta 0}| \sqrt{1 + (3/2)\mu}$ . Тогда при  $|\varepsilon_{\beta 0}| \sim 1$  характерное время взаимодействия волн с амплитудами  $|\varepsilon_\alpha|$ ,  $|\varepsilon_\beta|$ ,  $|b_1|$   $\tau_0 \sim (v \sqrt{1 + (3/2)\mu})^{-1}$ .

Оценивая далее из системы (5) величину  $|b_1|_{\max} \sim v^{1/2} Q^{-1/2}$  и подставляя значение  $|b_1|$  в формулу (8) (нетрудно видеть, что  $\tau_1 \sim 1/|b_1|_{\max}$  при любых значениях  $\mu$ ), найдем  $\tau_1 \sim \sqrt{Q}/[(1 + \mu/2)v^{1/2}]$ . В результате имеем

$$\frac{\tau_0}{\tau_1} \sim \frac{1 + \mu/2}{\sqrt{(1 + (3/2)\mu)Q} v^{1/2}}. \quad (9)$$

В нерелятивистском случае, когда  $\mu \ll 1$ , отношение  $\tau_0/\tau_1$  есть функция только параметра  $v$  и в условиях (2)  $\tau_0/\tau_1 \gg 1$ . Последнее означает, что до нелинейной стабилизации амплитуд электромагнитных волн происходит многократный обмен энергией между первой и второй гармониками пучковой плазменной волны.

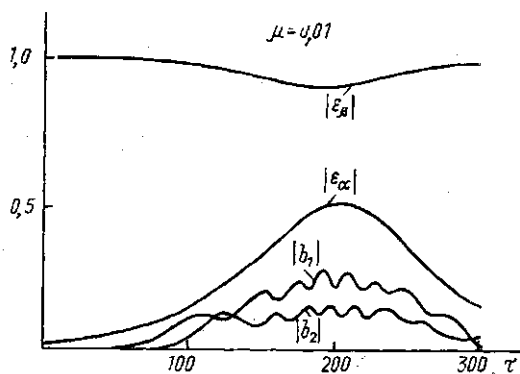


Рис. 1

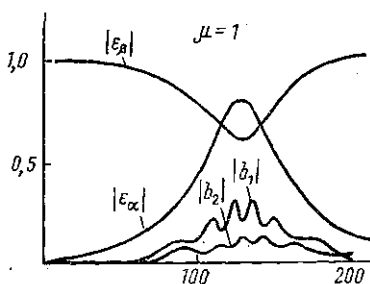


Рис. 2

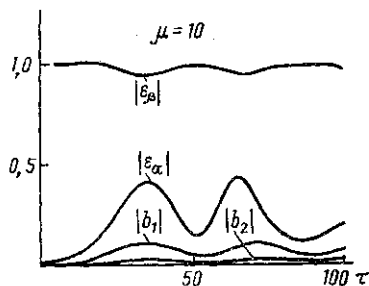


Рис. 3

$\mu \gg v^{-1}$ , то  $\tau_0/\tau_1 \ll 1$  и обмен энергией между плазменными пучковыми волнами отсутствует. Это означает, что вторая гармоника пучковой волны вообще в этих условиях не возбуждается.

Полученные оценки хорошо подтверждаются результатами численного интегрирования уравнений (5) при следующих начальных условиях:  $|\epsilon_{\alpha 0}|=0,01$ ;  $|\epsilon_{\beta 0}|=1,0$ ;  $|b_{10}|=0$ ;  $|b_{20}|=0$ . Параметр  $\nu$  во всех расчетах полагается равным 0,05, и исследуется процесс рассеяния с повышением частоты, когда  $\beta=+1$  (исследование взрывного процесса дает аналогичные результаты и поэтому здесь не приводится). На рис. 1 приведена временная динамика величин  $|\epsilon_{\alpha}|$ ,  $|\epsilon_{\beta}|$ ,  $|b_1|$ ,  $|b_2|$  при  $\mu=0,01$ . Видно многократное взаимодействие пучковых волн между собой. Этот случай практически совпадает с результатом работы [6]. На рис. 2 изображены те же величины при  $\mu=1$ . Поскольку при этом неравенство  $t_0/t_1 < 1$  сохраняется, то наблюдается также многократное взаимодействие волн между собой. Однако по сравнению с предыдущим случаем количество обменов энергией между первой и второй гармониками до нелинейной стабилизации амплитуд электромагнитных волн становится значительно меньше. На рис. 3 изображена динамика волн при  $\mu=10$ . При этом  $\mu \sim \nu^{-1}$ ,  $t_0 \sim t_1$  и хорошо видно, что взаимодействие становится практически трехволновым, поскольку вторая пучковая гармоника  $|b_2|$  почти не возбуждается.

Таким образом, влияние релятивизма пучка существенным образом отражается на нелинейной динамике четырехволнового рассеяния. При ультрарелятивистских энергиях электронов, как следует из сказанного выше, плотный пучок модулируется по гармоническому закону. Последнее обстоятельство может быть использовано при создании модулированных пучков с заданными параметрами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Литвак А. Г., Петрухина В. И., Трахтенгерц В. Ю. // Письма в ЖЭТФ. 1973. 18, № 3. С. 190. [2] Огнивенко В. В. // Радиотехн. и электроника. 1982. 27, № 9. С. 1818. [3] Балакирев В. А. // Изв. вузов, Радиофизика. 1982. 25, № 10. С. 1198. [4] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И. // ЖЭТФ. 1979. 76, № 3. С. 930. [5] Кузелев М. В., Панин В. А. // Изв. вузов, Радиофизика. 1984. 27, № 4. С. 426. [6] Кузелев М. В., Бобылев Ю. В., Панин В. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. 29, № 4. С. 48. [7] Кузелев М. В., Панин В. А., Плотников А. П., Рухадзе А. А. // Кр. сообщ. по физике ФИАН. 1988. № 12. С. 9. [8] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Панин В. А. // ЖЭТФ. 1986. 91, № 11. С. 1620.

Поступила в редакцию  
18.05.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1

УДК 538.573

#### НОВАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА БЕГУЩИХ ВОЛН

В. Д. Гусев, С. М. Голынский

(кафедра физики атмосферы)

Описан новый подход к проблемам рассеяния волн в случайно-неоднородных средах. Этот подход, названный модифицированным методом бегущих волн, использован для решения задачи о распространении излучения в одномерном слое со случайными неоднородностями. Показано, что для этой задачи модифицированный метод бегущих волн обобщает результаты предшествующих работ и позволяет уточнить границы применимости использовавшихся ранее приближений.

Задача о распространении волн в одномерной среде со случайными неоднородностями в последние десятилетия постоянно привлекает внимание исследователей [1—4]. Это обусловлено ее важностью для