Полученные оценки хорошо подтверждаются результатами численного интегрирования уравнений (5) при следующих начальных условиях: $|\varepsilon_{\alpha 0}|=0{,}01$; $|\varepsilon_{\beta 0}|=1{,}0$; $|b_{10}|=0$; $|b_{20}|=0$. Параметр ν во всех расчетах полагается равным 0,05, и исследуется процесс рассеяния с повышением частоты, когда $\beta=+1$ (исследование взрывного процесса дает аналогичные результаты и поэтому здесь не приводится). На рис. 1 приведена временная динамика величин $|\varepsilon_\alpha|$, $|\varepsilon_\beta|$, $|b_1|$, $|b_2|$ при $\mu=0{,}01$. Видно многократное взаимодействие пучковых волн между собой. Этот случай практически совпадает с результатом работы [6]. На рис. 2 изображены те же величины при $\mu=1$. Поскольку при этом неравенство $\tau_0/\tau_1<1$ сохраняется, то наблюдается также многократное взаимодействие волн между собой. Однако по сравнению с предыдущим случаем количество обменов энергией между первой и второй гармониками до нелинейной стабилизации амплитуд электромагнитных волн становится значительно меньше. На рис. 3 изображена динамика волн при $\mu=10$. При этом $\mu\sim\nu^{-1}$, $\tau_0\sim\tau_1$ и хорошо видно, что взаимодействие становится практически трехволновым, поскольку вторая пучковая гармоника $|b_2|$ почти не возбуждается.

Таким образом, влияние релятивизма пучка существенным образом отражается на нелинейной динамике четырехволнового рассеяния. При ультрарелятивистских энергиях электронов, как следует из сказанного выше, плотный пучок модулируется по гармоническому закону. Последнее обстоятельство может быть использовано при создании модулированных пучков с заданными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Литвак А. Г., Петрухина В. И., Трахтенгерц В. Ю.//Письма в ЖЭТФ. 1973. 18, № 3. С. 190. [2] Огнивенко В. В.//Радиотехн. и электроника. 1982. 27, № 9. С. 1818. [3] Балакирев В. А.//Изв. вузов, Радиофизика. 1982. 25, № 10. С. 1198. [4] Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И.//ЖЭТФ. 1979. 76. № 3. С. 930. [5] Кузелев М. В., Панин В. А.//Изв. вузов, Радиофизика. 1984. 27, № 4. С. 426. [6] Кузелев М. В., Бобылев Ю. В., Панин В. А.// //Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1988. 29, № 4. С. 48. [7] Кузелев М. В., Панин В. А., Плотников А. П., Рухадзе А. А.//Кр. сообщ. по физике ФИАН. 1988. № 12. С. 9. [8] Кузелев М. В., Рухадзе А. А., Бобылев Ю. В., Панин В. А.// //ЖЭТФ. 1986. 91, № 11. С. 1620.

Поступила в редакцию 18.05.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1

УДК 538.573

НОВАЯ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА БЕГУЩИХ ВОЛН

В. Д. Гусев, С. М. Голынский

(кафедра физики атмосферы)

Описан новый подход к проблемам рассеяния волн в случайно-неоднородных средах. Этот подход, названный модифицированным методом бегущих волн, использован для решения задачи о распространении излучения в одномерном слое со случайными неоднородностями. Показано, что для этой задачи модифицированный метод бегущих волн обобщает результаты предшествующих работ и позволяет уточнить границы применимости использовавшихся ранее приближений.

Задача о распространении волн в одномерной среде со случайными неоднородностями в последние десятилетия постоянно привлекает внимание исследователей [1—4]. Это обусловлено ее важностью для понимания физики процесса рассеяния волн в случайно-неоднородных средах. В настоящей работе предлагается новый подход к решению этой задачи, обладающий рядом преимуществ по сравнению с использовавшимися ранее приближениями.

Рассмотрим прохождение волны через одномерный слой, расположенный в области $0 \leqslant z \leqslant L$. Диэлектрическая проницаемость среды имеет вид $\varepsilon(z) = 1 + \varepsilon_1(z)$, где $\varepsilon_1(z)$ может быть в общем случае как детерминированной, так и случайной функцией. Для простоты полагаем, что вне слоя $\varepsilon(z) = 1$. Пусть из области $z < 0$ на слой падает по нормали плоская монохроматическая волна единичной амплитуды $U_0(z) = \exp\{ikz\}$. В результате прохождения через слой в области $z > L$ появляется прошедшая волна $U_T(z) = T \exp\{ikz\}$, а в области $z < 0$ — волна $U_R(z) = R \exp\{-ikz\}$, отраженная от слоя. Неизвестные амплитуды этих волн T и R являются комплексными коэффициентами прохождения волны через слой и отражения от слоя соответственно.

Внутри слоя волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$E''(z) + k^2 [1 + \varepsilon_1(z)] E(z) = 0, \qquad (1)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной z.

В предлагаемом модифицированном методе бегущих волн решение уравнения (1) ищется в виде бегущих волн [5, 6], распространяющихся в противоположных направлениях:

$$U(z) = U_1(z) + U_2(z) = C_1 \Theta^{1/2} \exp\{ik\Phi\} + C_2 \Theta^{1/2} \exp\{-ik\Phi\}, \quad \Phi = \int_0^z \frac{d\zeta}{\Theta(\zeta)}, \qquad (2)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Однозначность представления поля в виде бегущих волн U_1 и U_2 (2), линейная независимость которых следует из отличия от нуля определителя Вронского, доказана в работе [7]. Неизвестная функция $\Theta(z)$ удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$2\Theta\Theta'' - (\Theta')^2 + 4k^2\varepsilon\Theta^2 - 4k^2 = 0. \qquad (3)$$

В качестве начальных условий для уравнения (3) используем результат геометрооптического подхода (ВКБ-приближения) для плоскослоистой среды: $\Theta(z) = \varepsilon^{-1/2}(z)$ [8], т. е.

$$\Theta(z=0) = \Theta_0 = (1 + \varepsilon_{10})^{-1/2}, \quad \Theta'(z=0) = \Theta_0' = -(1/2)(1 + \varepsilon_{10})^{-3/2} \varepsilon_{10}'. \qquad (4)$$

В дальнейшем нижние индексы «0» и «L» показывают, что значения соответствующих функций взяты на нижней $(z=0)$ и верхней $(z=L)$ границах слоя. На этих границах должны выполняться условия непрерывности для $U(z)$ и $U'(z)$, которые имеют вид

$$\begin{gathered} 1 + R = \Theta_0^{1/2}(C_1 + C_2), \quad ik(1 - R) = (1/2)\Theta_0^{-1/2}\Theta_0'(C_1 + C_2) + \\ + ik\Theta_0(C_1 - C_2), \\ T \exp\{ikL\} = \Theta_L^{1/2}(C_1 \exp\{ik\Phi_L\} + C_2 \exp\{-ik\Phi_L\}), \qquad (5) \\ ikT \exp\{ikL\} = \frac{1}{2}\Theta_L^{-1/2}\Theta_L'(C_1 \exp\{ik\Phi_L\} + C_2 \exp\{-ik\Phi_L\}) + \\ + ik\Theta_L^{-1/2}(C_1 \exp\{ik\Phi_L\} - C_2 \exp\{-ik\Phi_L\}) \end{gathered}$$

Дальнейшее продвижение в исследовании проблемы связано с решением уравнения (3). Один из способов его решения заключается в переходе к тождественному ему линейному интегральному уравнению. Для этого, используя в (3) подстановку $\Theta'=u^{1/2}$ и решая линейное дифференциальное уравнение относительно функции $u=u(\Theta)$, получим промежуточное интегро-дифференциальное уравнение

$$\Theta''+4k^2\Theta=\frac{1}{2\Theta_0}\left[(\Theta_0')^2+4k^2(1+\Theta_0^2)\right]-2k^2\left[\varepsilon_1\Theta+\int_0^z\varepsilon_1\Theta'd\zeta\right].$$

Интегрируя это уравнение и выполняя ряд несложных преобразований, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\Theta(z)=f(z,\ \Theta_0,\ \Theta_0')+k\int_0^z H(z,\ \zeta)\,\Theta(\zeta)\,d\zeta, \tag{6}$$

где

$$H(z,\ \zeta)=\frac{1}{2k}\varepsilon_1'(\zeta)\left[1-\cos 2k(z-\zeta)\right]-2\varepsilon_1(\zeta)\sin 2k(z-\zeta),$$

$$f(z,\ \Theta_0,\ \Theta_0')=\Theta_0+\frac{1}{8k^2\Theta_0}\left[(\Theta_0')^2+4k^2(1-\Theta_0^2)+\right.$$

$$\left.+4k^2\varepsilon_{10}\Theta_0^2\right](1-\cos 2kz)+\frac{\Theta_0'}{2k}\sin 2kz.$$

В ряде случаев, в частности для детерминированной функции $\varepsilon_1(z)$, решение интегрального уравнения (6) оказывается существенно проще, чем решение исходного уравнения (3).

Другой подход к решению уравнения (3) связан с записью выражений для искомой функции $\Theta(z)$ и ее производной $\Theta'(z)$ в виде

$$\Theta(z)=\operatorname{ch}\xi+\operatorname{sh}\xi\cos(2kz+\varphi), \tag{7}$$

$$\Theta'(z)=-2k\operatorname{sh}\xi\sin(2kz+\varphi), \tag{8}$$

где вновь введенные функции $\xi=\xi(z)$ и $\varphi=\varphi(z)$ определяются системой двух уравнений первого порядка, а именно:

$$\begin{aligned}&\xi'=k\varepsilon_1\sin(2kz+\varphi), && \xi(z=0)=\xi_0,\\ &\varphi'=k\varepsilon_1\left[1+\operatorname{cth}\xi\cos(2kz+\varphi)\right], && \varphi(z=0)=\varphi_0.\end{aligned} \tag{9}$$

Так как от одной неизвестной функции $\Theta(z)$ произведен переход к двум новым функциям $\xi(z)$ и $\varphi(z)$, то эти новые функции могут быть связаны произвольным соотношением, которое удобно выбрать в виде равенства (8). Подстановка (7) и (8) в исходное уравнение (3) при учете (9) приводит к выводу, что эти выражения представляют собой формальное решение (3).

Формулы (7) и (8) можно рассматривать как переход от переменных Θ и Θ' к переменным ξ и φ. Поэтому начальные условия для системы уравнений (9) выражаются через начальные условия (4).

Если радиус корреляции флуктуационного поля $\varepsilon_1(z)$ достаточно мал, то система стохастических дифференциальных уравнений (9) может быть использована для вывода уравнения Фоккера—Планка, описывающего в марковском диффузионном приближении эволюцию плотности вероятности $W(\xi,\ \varphi,\ z)$. Возвращаясь в решении полученного уравнения Фоккера—Планка к исходным переменным при помощи преобразований (7), и (8), можно получить плотность вероятности $W(\Theta, \Theta', z)$, знание которой позволяет найти любые статистические характеристики рассеянного излучения как внутри слоя, так и вне его.

Однако в настоящей работе ограничимся более подробным описанием другого подхода к решению системы уравнений (9), который не связан с априорным ограничением на радиус корреляции флуктуационного поля. В основе этого подхода лежит разложение искомых функций ξ и φ в ряды по степеням безразмерного параметра ν, характеризующего стандарт флуктуаций диэлектрической проницаемости среды,

$$\xi = \nu\xi_1 + \nu^2\xi_2 + \nu^3\xi_3 + \ldots, \quad \varphi = \tilde{\varphi} + \nu\varphi_1 + \nu^2\varphi_2 + \ldots. \tag{10}$$

Подставляя разложения (10) в систему уравнений (9) и приравнивая члены при одинаковых степенях ν, получим

$$\nu^1: \quad \xi_1' = k\varepsilon_1 \sin(2kz + \tilde{\varphi}), \quad \xi_1(z=0) = \xi_{10}, \tag{9'}$$

$$\xi_1\tilde{\varphi}' = k\varepsilon_1 \cos(2kz + \tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi}(z=0) = \tilde{\varphi}_0;$$

$$\nu^2: \quad \xi_2' = k\varepsilon_1\varphi_1 \cos(2kz + \tilde{\varphi}) \quad \xi_2(z=0) = \xi_{20}, \tag{9''}$$

$$(\xi_1\varphi_1)' = k\varepsilon_1\xi_1 - \xi_2\tilde{\varphi}', \qquad \varphi_1(z=0) = \varphi_{10}$$

и т. д.

Решение системы уравнений (9′) имеет вид

$$\xi_1^2 = k^2\int\limits_0^z\!\!\int \varepsilon_1(\zeta_1)\,\varepsilon_1(\zeta_2)\cos 2k(\zeta_1 - \zeta_2)\,d\zeta_1 d\zeta_2 +$$

$$+ 2k\xi_{10}\int\limits_0^z \varepsilon_1(\zeta)\sin(2k\zeta + \tilde{\varphi}_0)\,d\zeta + \xi_{10}^2, \tag{11}$$

$$\cos(2kz + \tilde{\varphi}) = -\frac{1}{\xi_1}\left\{k\int\limits_0^z \varepsilon_1(\zeta)\sin 2k(z-\zeta)\,d\zeta + \xi_{10}\cos(2kz + \tilde{\varphi}_0)\right\},$$

$$\sin(2kz + \tilde{\varphi}) = \frac{1}{\xi_1}\left\{k\int\limits_0^z \varepsilon_1(\zeta)\cos 2k(z-\zeta)\,d\zeta + \xi_{10}\sin(2pz + \tilde{\varphi}_0)\right\}.$$

Однако в силу громоздкости решения системы уравнений (9″) провести прямую оценку степени малости следующих членов разложений (10) и возможности использования первого приближения (11) в качестве решения (9) не удается. Поэтому воспользуемся косвенной оценкой. Подставим (10) в формулу (7) и получим разложение искомой функции Θ по степеням параметра ν (для сокращения выкладок рассмотрим простейший случай слоя, согласованного со средой на нижней границе, т. е. $\varepsilon_{10}=0$, $\varepsilon_{10}'=0$ и, следовательно, $\Theta_0=1$, $\Theta_0'=0$ или $\xi_0=0$, $\varphi_0=0$):

$$\Theta = 1 + \nu\Theta_1 + \nu^2\Theta_2 + \ldots = 1 + \nu\xi_1\cos(2kz + \tilde{\varphi}) +$$

$$+ \nu^2\left[\frac{1}{2}\xi_1^2 + \xi_2\cos(2kz + \tilde{\varphi}) - \xi_1\varphi_1\sin(2kz + \tilde{\varphi})\right] + \ldots. \tag{12}$$

Несколько первых членов ряда (12) легко получить из интегрального уравнения (6), используя метод последовательных приближений.

Разложение приближенного решения, определяемого (11), имеет вид

$$\widetilde{\Theta}=1+\nu\widetilde{\Theta}_1+\nu^2\widetilde{\Theta}_2+\ldots=1+\nu\xi_1\cos(2kz+\widetilde{\varphi})+(1/2)\nu^2\xi_1^2+\ldots. \qquad (12')$$

Таким образом, сравнение членов одного порядка в разложениях точного (12) и приближенного (12′) решений позволяет оценить вклад вторых и последующих членов разложений (10) в точное решение.

Для проведения таких оценок необходимо конкретизировать модель случайно-неоднородной среды. Полагаем, что флуктуационная компонента диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ представляет собой нормальный процесс с нулевым средним и гауссовой функцией корреляции:

$$\langle\varepsilon_1\rangle=0,\ \ \langle\varepsilon_1(z_1)\,\varepsilon_1(z_2)\rangle=\sigma_\varepsilon^2\exp\{-(z_1-z_2)^2/a^2\},$$

где $\sigma_\varepsilon{}^2$ — дисперсия флуктуаций диэлектрической проницаемости, а a — радиус корреляции ε_1 в направлении распространения излучения (характерный продольный масштаб неоднородности плоскослоистой среды).

Сравнение средних значений для членов второго и четвертого порядков в разложениях (12) и (12′) приводит к выводу, что возможность использования выражения

$$\widetilde{\Theta}(z)=\mathrm{ch}\,\xi_1+\mathrm{sh}\,\xi_1\cos(2kz+\widetilde{\varphi})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}\,\xi_1^{2n}\left\{1-\frac{k}{2n+1}\int_0^z\varepsilon_1(\zeta)\sin 2k(z-\zeta)\,d\zeta\right\} \qquad (13)$$

при учете (11) в качестве первого приближения для искомой функции $\Theta(z)$ определяется условием

$$2\sqrt{\pi}\,k^2az\exp\{-k^2a^2\}\gg 1. \qquad (14)$$

Формальные выражения для любых характеристик излучения как внутри слоя, так и на выходе из него могут быть получены на основании общего решения (7) и (8). Так, например, для отражательной способности слоя, характеризуемой квадратом модуля коэффициента отражения R, из системы (5) при учете начальных условий (4) получим достаточно громоздкое выражение

$$|R|^2=\frac{4\,[2k^2(\Theta_L-\Theta_0)\cos k\Phi_L-k\,(\Theta_0\Theta_L'+\Theta_0'\Theta_L)\sin k\Phi_L]^2+[2k\,(\Theta_L'-\Theta_0')\cos k\Phi_L-\{\Theta_0'\Theta_L'+4k^2(1-\Theta_0\Theta_L)\}\sin k\Phi_L]^2}{4\,[2k^2(\Theta_L-\Theta_0)\cos k\Phi_L+k\,(\Theta_0\Theta_L'-\Theta_0'\Theta_L)\sin k\Phi_L]^2+[2k\,(\Theta_L'-\Theta_0')\cos k\Phi_L-\{\Theta_0'\Theta_L'+4k^2(1+\Theta_0\Theta_L)\}\sin k\Phi_L]^2},$$

которое существенно упрощается для слоя, согласованного со средой на нижней границе ($\Theta_0=1$, $\Theta_0'=0$):

$$|R|^2=\frac{(\Theta_L')^2+4k^2(1-\Theta_L)^2}{(\Theta_L')^2+4k^2(1+\Theta_L)^2}=\mathrm{th}^2(\xi_L/2). \qquad (15)$$

Для пропускательной способности слоя из решения (5) следует, что $|T|^2=1-|R|^2$. Этот результат является следствием закона сохранения потока энергии в среде, которому удовлетворяет представление волнового поля в виде бегущих волн (2), а именно:

$$[U^*U'-UU^{*\prime}]'=0.$$

Знание приближенного выражения (13) для функции $\Theta(z)$ дает динамическое решение исследуемой задачи в области, определяемой условием (14). Для нахождения статистических характеристик излучения необходимо уточнить статистические характеристики функции ξ_1 (11). Для рассматриваемого случая, когда $\varepsilon_1(z)$ — нормальный процесс, удается показать, что

$$\langle \xi_1^{2n}\rangle \approx (1/2)(C_{2n}^2+1)\langle \xi_1^2\rangle^n, \qquad (16)$$

где $C_{2n}{}^2$ — биномиальный коэффициент. С помощью равенства (16) могут быть определены различные статистические характеристики волнового поля, например функция $\langle\tilde{\Theta}\rangle=\langle \mathrm{ch}\,\xi_1\rangle$, описывающая интенсивность проходящей волны внутри согласованного слоя ($|C_1|^2=1$); $\langle|R|^2\rangle=\langle \mathrm{th}^2(\xi_{1L/2})\rangle$ и т. д.

Наиболее простые выражения получаются в случае слабых флуктуаций диэлектрической проницаемости среды ($\sigma_\varepsilon{}^2\ll 1$), когда одновременно с (14) выполняется также условие

$$\langle \xi_1^2\rangle \approx 2\sqrt{\pi}\,\sigma_\varepsilon^2 k^2 az \exp\{-k^2a^2\}\ll 1,$$

соответствующее области применимости метода малых возмущений (борновскому приближению). При этом, в частности, для отражательной способности согласованного слоя (15) имеем

$$\langle|R|^2\rangle \approx \frac{1}{4}\langle \xi_{1L}^2\rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sigma_\varepsilon^2 k^2 aL \exp\{-k^2a^2\}.$$

Другим предельным случаем описываемого модифицированного метода бегущих волн является приближение геометрической оптики (ВКБ-приближение) для плоскослоистой среды. В работе [9] показано, что геометрооптические результаты [8] вытекают из решения модифицированного метода бегущих волн при выполнении условия, обратного (14),

$$2\sqrt{\pi}\,k^2az\exp\{-k^2a^2\}\ll 1 \qquad (17)$$

и дополнительного условия $(ka)^2\gg 1$. Тем самым появляется возможность оценить границы применимости ВКБ-приближения на основе математического решения точного уравнения (3) для функции $\Theta(z)$. В результате оценки [9] условие (17) приводит к новому дополнительному ограничению, накладываемому на дальность распространения излучения в плоскослоистой случайно-неоднородной среде, при которой геометрическая оптика остается справедливой.

В заключение отметим, что наиболее существенным из достоинств предлагаемого в настоящей работе подхода является отсутствие в модифицированном методе бегущих волн априорных ограничений на характерные масштабы неоднородностей среды и величину флуктуаций диэлектрической проницаемости. Для рассматриваемой одномерной задачи описываемый метод включает в себя использовавшиеся ранее приближения как предельные случаи и позволяет уточнить границы их применимости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Герценштейн М. Е., Васильев В. Б.//Радиотехн. и электроника. 1959. 4, № 5. С. 611. [2] Papanicolaou G. C.//SIAM J. Appl. Math. 1971. 21, N 1. P. 13. [3] Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М., 1980. [4] Шведов Б. М.//Изв. вузов, Радиофизика. 1990. 33, № 2. С. 191. [5] Gans R.//Ann. Phys. 1915. 47, N 14. P. 709. [6] Виноградова М. Б., Гусев В. Д.//Радиотехн. и электроника. 1974. 19, № 3. С. 481. [7] Mumbo M., Nagano N., Yamaguchi T.//Mem. Fac. Technology Kanazawa Univ. 1975. 9. P. 69. [8] Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., 1967. [9] Гусев В. Д., Голынский С. М.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 5. С. 90.

Поступила в редакцию
30.07.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 621.373.8

НЕВЗАИМНЫЙ ЭФФЕКТ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ УЗКИХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ЧЕРЕЗ УЛЬТРАЗВУКОВУЮ ВОЛНУ

О. Е. Наний, А. Б. Селунский

(НИИЯФ)

Рассчитана величина амплитудной и фазовой невзаимности при взаимодействии с бегущей ультразвуковой волной встречных световых пучков конечных поперечных размеров. Определены области значений параметров, при которых учет ширины световых пучков является существенным.

Интерес к исследованию невзаимных эффектов, возникающих при взаимодействии встречных световых пучков с бегущей ультразвуковой волной (УЗВ) [1, 2], обусловлен широкими возможностями их практического использования для управления амплитудными и частотными характеристиками кольцевых лазеров [3—6].

В работах [1—4] исследованы невзаимные акустооптические эффекты в приближении плоских световых волн. Однако в реальных условиях при использовании акустооптических модуляторов в кольцевых лазерах пренебрежение эффектами, связанными с конечной шириной световых лучей, может привести к существенным ошибкам.

Целью настоящей работы является исследование невзаимных эффектов при взаимодействии с бегущей УЗВ реальных световых пучков конечных поперечных размеров.

Распространение световой волны в пространстве модулятора описывается уравнением

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}+\frac{1}{c_2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\mathbf{D}=0, \tag{1}$$

где $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$, $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1\cos(\mathbf{kr}-\Omega t)$, $|\mathbf{k}|=2\pi/\lambda$; Ω, Λ — частота и длина волны УЗВ соответственно; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля; ε_0 — диэлектрическая проницаемость материала модулятора в отсутствие УЗВ; ε_1 — амплитуда изменения диэлектрической проницаемости модулятора под действием УЗВ. Ограничимся решением уравнения