АКУСТИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

УДК 534.26

О СУЩЕСТВОВАНИИ СИММЕТРИЧНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ МОДЫ В КВАДРАТИЧНОМ ТВЕРДОМ КЛИНЕ

В. В. Крылов

(кафедра акустики)

Показано, что в твердотельном усеченном клине, локальная толщина которого квадратичным образом зависит от его высоты, наряду с ранее предсказанным счетным числом антисимметричных локализованных вблизи вершины акустических мод может существовать также одна единственная симметричная акустическая мода. Эта мода локализована в окрестности вершины клина и близка по своим характеристикам к поверхностной акустической волне Рэлея. Рассчитаны фазовая скорость и структура поля рассматриваемой моды. Определена нижняя частотная граница ее существования.

В недавней работе [1] было показано, что вдоль вершины твердотельного усеченного клина, локальная толщина которого описывается выражением $h(x) = \varepsilon x^2$ (рис. 1), может распространяться счетное число



Рис. 1. Квадратичный твердый клин: $h(x) = \varepsilon x^2$

Рис. 2. Зависимость относительной скорости симметричной моды квадратичного твердого клина от параметра $k_t x_0$ для среды с коэффициентом Пуассона $\sigma = 1/3$ при $c/c_t = 0,9194$ (соответствует квазирэлеевской моде, распространяющейся вдоль торца тонкой пластинки) — 1 и $c/c_t = 0,9325$ (соответствует рэлеевской волне в полупространстве) — 2

антисимметричных (квазиизгибных) локализованных мод колебаний, фазовые скорости которых в принципе могут быть сколь угодно малыми. Ниже мы покажем, что в рассматриваемой клиновидной структуре может также существовать одна единственная симметричная локализованная мода, близкая по своим характеристикам к поверхностной акустической волне Рэлея.

Нужно сказать, что проблема существования симметричных локализованных мод в острых твердотельных клиньях наряду с различными прикладными аспектами [2] имеет также важное принципиальное значение. Теоретических работ, посвященных этому вопросу, довольно мало, а их выводы зачастую противоречат друг другу. Так, в статье [3] с помощью численных методов рассматривалось распространение как антисимметричных, так и симметричных мод вдоль ребра идеального твердого клина, образованного при пересечении двух плоских граней (в дальнейшем для краткости будем называть такой клин линейным). При этом, в частности, было показано, что в клиньях с острыми углами раскрыва существование симметричных мод невозможно. В отличие от [3] авторами работы [4] также на основе численных расчетов был сделан вывод о возможности существования симметричной моды в рстроугольном линейном клине. В работе [5] среди других результатов было показано аналитически, что существование симметричной квазирэлеевской моды возможно в усеченном остроугольном линейном клине. Этот вывод был получен в результате решения соответствующей краевой задачи в приближении геометрической акустики, справедливом при условии $k_p x_0 \gg 1$, где x_0 — высота усечения клина, а k_p — волновое число продольной волны в тонкой пластинке [6].

В отличие от случая линейного клина симметричные моды в квадратичном твердотельном клине до сих пор не анализировались. Между тем, как будет видно из дальнейшего, такого рода структура интересна в том отношении, что она может быть проанализирована не только в рамках геометро-акустического подхода, но и на основе точного решения соответствующей краевой задачи для тонкой пластинки переменной толщины $h(x) = \varepsilon x^2$. Это позволяет установить полный закон дисперсии симметричной локализованной моды и определить нижнюю частотную границу ее существования.

Считая изотропный твердый клин достаточно острым, т. е. полагая параметр εx_0 малым (конкретное ограничение на εx_0 будет дано позже), воспользуемся для описания перемещений частиц среды u_x и u_y в срединной плоскости клина уравнениями движения плоского напряженного состояния [7], в которых, однако, толщину пластины h будем теперь считать зависящей от x:

$$\frac{\partial}{\partial x} [h(x)\sigma_{xx}] + \frac{\partial}{\partial y} [h(x)\sigma_{xy}] + \omega^2 \rho h(x) u_x = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [h(x)\sigma_{xy}] + \frac{\partial}{\partial y} [h(x)\sigma_{yy}] + \omega^2 \rho h(x) u_y = 0.$$
(1)

Здесь σ_{xx} , σ_{xy} и σ_{yy} — компоненты тензора упругих напряжений в плоскости xy, ρ — плотность материала клина, ω — круговая частота (фактор $\exp\{-i\omega t\}$ опущен). Уравнения движения (1) нужно дополнить уравнениями состояния (закон Гука для тонкой пластины) [7]:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \sigma^2} (u_{xx} + \sigma u_{yy}),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \sigma^2} (u_{yy} + \sigma u_{xx}),$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1 + \sigma} u_{xy},$$
(2)

где *E* и *σ* — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала клина (или, что то же, пластины переменной толщины),

46

 $u_{ij} = (1/2) (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ — компоненты линеаризованного тензора деформации (индексы *i*, *j* принимают значения *x*, *y*). Как известно, если в (2) сделать формальную замену

$$\sigma = \frac{\sigma^*}{1 - \sigma^*}, \ E = \frac{E^*}{1 - \sigma^*}, \tag{3}$$

то соотношения (2) переходят в формулы, связывающие напряжения и деформации в плоскости xy для неограниченной среды (при $u_z=0$), характеризуемой упругими постоянными E^* и σ^* (так называемое плоское деформированное состояние [7]).

Поле интересующих нас симметричных локализованных волн должно удовлетворять не только соотношениям (1) и (2), но и граничным условиям отсутствия нормальных напряжений на усеченной вершине клина (при $x = x_0$):

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = 0, \tag{4}$$

а также условию обращения в нуль при $x \rightarrow \infty$.

Разделим обе части уравнения (1) на $h(x_0)$. Тогда, подставляя (2) в (1) и учитывая (3), нетрудно видеть, что рассматриваемая краевая задача об отыскании симметричной локализованной моды твердотельного клина формально сводится к задаче о нахождении поверхностной акустической волны рэлеевского типа на поверхности вертикально неоднородного твердого полупространства (задаче Рэлея), эквивалентные упругие модули Ламе которого $\tilde{\lambda}(x)$ и $\tilde{\mu}(x)$, а также плотность $\tilde{\rho}(x)$ изменяются с глубиной по закону

$$\widetilde{\lambda}(x) = \lambda^* \frac{h(x)}{h(x_0)}, \quad \widetilde{\mu}(x) = \mu^* \frac{h(x)}{h(x_0)}, \quad \widetilde{\rho}(x) = \rho \frac{h(x)}{h(x_0)}.$$
(5)

Отметим, что эффективные модули Ламе λ^* и μ^* связаны с их истинными значениями для материала клина соотношениями

$$\lambda^{*} = \frac{E^{*}\sigma^{*}}{(1+\sigma^{*})(1-2\sigma^{*})} = \lambda \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}, \qquad (6)$$
$$\mu^{*} = \frac{E^{*}}{2(1+\sigma^{*})} = \mu.$$

Хорошо известно, что в случае произвольных зависимостей $\lambda(x)$, $\tilde{\mu}(x)$ и $\tilde{\rho}(x)$ задача Рэлея не имеет точного аналитического решения (см., напр., [8]). Поэтому, поступая по аналогии с [5], изложим сначала вкратце результаты решения задачи для рассматриваемого случая $h(x) = \epsilon x^2$ в геометро-акустическом приближении. В этом случае уравнения (1), (2) описывают распространение под произвольным углом к поверхности не взаимодействующих друг с другом продольных и поперечных акустических волн (см. также [8]). При этом роль продольной волны играет симметричная (продольная) мода тонкой пластинки (или низшая симметричная мода Лэмба), распространяющаяся со скоростью $c_p = [E/\rho(1-\sigma^2)]^{1/2} = [(\lambda^* + 2\mu)/\rho]^{1/2}$, а роль поперечной (сдвиговой) волны — низшая SH-мода пластинки, распространяющаяся со скоростью $c_t = (\mu/\rho)^{1/2}$. Геометро-акустические выражения для амплитуд смещений продольной и поперечной волн, характеризуемых далее индексами *p* и *t*, можно записать в виде

$$u_{i}^{(D)} = \frac{A_{i}}{k_{t}x} \exp\{iky - v_{p}x\},$$
(7)
$$u_{i}^{(1)} = \frac{B_{i}}{k_{t}x} \exp\{iky - v_{t}x\},$$
(8)

47

где k — проекция волновых чисел распространяющихся волн на ось y; $k_t = \omega/c_t$ — волновое число сдвиговой объемной волны; $v_{p,t} = (k^2 - k^2_{p,t})^{1/2}$; A_i и B_i — константы, определяемые из граничных условий, индекс iпринимает значения x и y. Наличие множителей x^{-1} в (7) и (8) отражает закон сохранения энергии для обоих типов волн [6] в произвольных сечениях x = const для рассматриваемого случая квадратичного клина. Отметим, что волны, описываемые формулами (7) и (8), в геометро-акустическом приближении не только не взаимодействуют, но и не испытывают рефракции, так как, согласно (5), значения скоростей c_p н c_t не зависят от x. Взаимодействие между волнами (7) и (8) наступает только на свободной границе (кромке клина), где должны выполняться граничные условия (4). Подстановка (7), (8) в (4) и использование известных соотношений div $u_t=0$ н гоt $u_p=0$ [7] приводят после отбрасывания членов порядка $(1/k_t x)^2$ и выше, в соответствии с методом геометрической акустики, к следующему дисперснонному уравнению, определяющему скорость локализованной симметричной моды:

$$(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 v_p v_t = 0. (9)$$

По форме уравнение (9) совпадает с известным уравнением типа Рэлея, описывающим распространение поверхностной волны рэлеевского типа вдоль кромки тонкой пластинки постоянной толщины [2]. Таким образом, в геометро-акустическом приближении фазовая скорость симметричной локализованной моды квадратичного твердого клина совпадает со скоростью квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль кромки тонкой пластинки. Соотношения между постоянными A_i и B_i также совпадают с соответствующими выражениями для волн Рэлея (см., напр., [7]). Единственное отличие состоит лишь в дополнительном спадании амплитуд с удалением от кромки, пропорциональном ($k_l x$)⁻¹ (см. формулы (7), (8)).

Рассмотренное геометро-акустическое решение, справедливое при $k_l x_0 \gg 1$, или, что то же, при $k_p x_0 \gg 1$, не дает ответа на вопрос о поведении рассматриваемой симметричной моды на более низких частотах. Однако для конкретного значения коэффициента Пуассона среды $\sigma = 1/3$ в рассматриваемом случае квадратичного твердого клина можно построить точное решение краевой задачи (1), (2), (4), опираясь (с учетом соотношений (3) и (5)) на решение, полученное в работе [9] для упругого полупространства с $\lambda(x) = \mu(x) = \mu_0(x/x_0)^2$ и $\rho(x) = \rho_0(x/x_0)^2$, т. е. для среды с коэффициентом Пуассона, равным 1/4, и скоростями продольных и сдвиговых волн, не зависящими от x. Авторы [9] использовали подстановку $u_x = u'_x/\sqrt{\mu(x)}$ и $u_y = u'_y/\sqrt{\mu(x)}$, в результате которой удалось получить точные формулы для амплитуд u_x и u_y в поверхностной волне, а также дисперсионное уравнение для определения ее фазовой скорости.

Не приводя в целях экономии места полученных в [9] формул для амплитуд u_x и u_y , тем более что в рассматриваемом случае они по форме совпадают с геометрическим решением (7), (8) (при этом нужно учесть, что $u_x = u_x^{(p)} + u_x^{(t)}$ и $u_y = u_y^{(p)} + u_y^{(t)}$), приведем соответствующее дисперсионное уравнение для случая квадратичного твердого клина, записав его в следующем компактном виде:

$$k_t^2 x_0^2 F(\eta) - k_t x_0 f(\eta) - \varphi(\eta) = 0.$$
⁽¹⁰⁾

Здесь $\eta = c/c_t$, где c — скорость искомой симметричной моды, $c_t (\mu/\rho)^{1/2}$ — скорость сдвиговой объемной волны; $F(\eta) = (2-\eta^2)^2 - 4(1-\eta^2)^{1/2}(1-(1/3)\eta^2)^{1/2}$ — так называемый определитель Рэлея для коэффициен-

та Пуассона $\sigma^* = 1/4$ (это соответствует коэффициенту Пуассона материала клина $\sigma = 1/3$); $t(\eta) = \eta^3 [3(1-(1/3)\eta^2)^{-1/2} + (1-\eta^2)^{1/2}]; \phi(\eta) = = 3\eta^2 - 3\eta^2 (1-\eta^2)^{1/2} (1-(1/3)\eta^2)^{1/2}.$

Поскольку уравнение (10) в работе [9] не анализировалось, получим его решение, используя то обстоятельство, что оно является квадратным относительно $k_i x_0$. Определив из (10) $k_i x_0$ как функцию η , легко построить и представляющую интерес обратную зависимость η от $k_i x_0$ (рис. 2). Из графика этой зависимости следует, что фазовая скорость с всегда больше своего геометро-акустического значения, совпадающего, как уже отмечалось, со скоростью волны рэлеевского типа на торце тонкой пластинки с $\sigma = 1/3$, соответствующей неограниченной среде с $\sigma^* = 1/4$, и стремится к нему при $k_i x_0 \rightarrow \infty$. Отметим, что непосредственно из уравнения (10) нетрудно также получить приближенное аналитическое выражение, описывающее поведение η при $k_i x_0 \gg 1$:

$$\eta = \eta_0 \left[1 + \frac{f(\eta_0)}{\eta_0 F'(\eta_0)} \frac{1}{k_t x_0} \right].$$
(11)

Здесь η_0 — значение η при $k_t x_0 \rightarrow \infty$. Подчеркнем, однако, что скорость рассматриваемой симметричной моды не может быть больше скорости рэлеевской волны в среде с коэффициентом Пуассона $\sigma = 1/3$, из которой изготовлен клин. В противном случае имело бы место излучение (типа черенковского) части ее энергин в рэлеевские волны и она превратилась бы в так называемую моду утечки. Пересечение горизонтальной прямой $\eta = 0.9325$, соответствующей скорости волны Рэлея для полупространства с $\sigma = 1/3$, с построенной дисперсионной зависимостью $\eta = \eta (k_t x_0)$ как раз и определяет нижнюю границу (по $k_t x_0$) существования симметричной моды в квадратичном твердом клине. Согласно рис. 2, это пересечение имеет место при $k_t x_0 \simeq 40$, или при $k_p x_0 \simeq 23$. Поэтому незатухающая симметричная мода существует при $k_t x_0 > 40$, или, что то же, при $k_p x_0 > 23$.

Определим, наконец, ограничение на параметр ex_0 в рассматриваемой структуре. Это ограничение связано с условием справедливости уравнений тонкой пластинки (1), (2) и вытекает из требования малости локальной толщины клина h(x), по сравнению с длиной сдвиговой волны $\lambda_t = 2\pi/k_t$, при значениях x, соответствующих характерной глубине проникновения рассматриваемой моды $l \sim \lambda_t = 2\pi/k_t$:

$$\epsilon (x_0 + 2\pi/k_t)^2 < 2\pi/k_t$$

(12)

Так как, согласно сказанному выше, для распространения незатухающей моды должно быть $k_t x_0 > 40$, то можно пренебречь величиной $2\pi/k_t$ в левой части неравенства (12). Тогда из (12) следует $40 < k_t x_0 < <2\pi/ex_0$, т. е. клин должен быть достаточно острым: $ex_0 \ll 1$.

Таким образом, в квадратичном твердом клине может существовать одна единственная симметричная акустическая мода, фазовая скорость которой близка, но несколько выше скорости волны рэлеевского типа на торце однородной тонкой пластинки. Для коэффициента Пуассона материала клина $\sigma = 1/3$ нижняя частотная граница существования этой моды определяется из условия $k_t x_0 > 40$. Следует ожидать, что и для других значений коэффициента Пуассона ограничение на $k_t x_0$ имеет тот же порядок величины. Аналогичное ограничение на $k_t x_0$ снизу, по-видимому, должно иметь место и в случае усеченного линейного остроугольного клина [5]. Отметим, что это предположение естественным образом согласуется с выводом работы [3] об отсутствии незатухающих симметричных мод в идеальной (неусеченной) структуре такого типа, т. е. в случае $k_t x_0 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Крылов В. В.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 6. С. 63.
[2] Олинер А.//Поверхностные акустические волны. М., 1981. С. 226.
[3] Moss S. L., Maradudin A. A., Cunningham S. L.//Phys. Rev. 1973. В 8, N 6. Р. 2999. [4] Tiersten H. F., Rubin D.//IEEE Ultrason. Symp. Proc. Milwaukee (Wisconsin), 1974. Р. 117. [5] Krylov V. V.//Proc. Ext. Abstr. 2nd Intern. Symp. «Surface Waves in Solids and Layered Structures». Varna (Bulg.), 1989. V. 1. Р. 63.
[6] Крылов В. В.//Акуст. журн. 1989. 35, № 2. С. 294. [7] Ландау Л. Д., Лиф-шинд Е. М. Теория упругости. М., 1987. [8] Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М., 1972. [9] Dutta K. L., Chakraborty S. K.//Indian J. Pure Appl. Math. 1989. 20, N 6. P. 646.

Поступила в редакцию» 16.05.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1

ГЕОФИЗИКА

УДК 530.145:550.383

ОЦЕНКИ БАРОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ Томаса-Ферми-Дирака

А. В. Калев

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Теоретические исследования поляризации при наличии неоднородных давлений в химически однородном изотермическом веществе проводятся на основе модели Томаса-Ферми-Дирака. Получены оценки электрических и магнитных полей Земли, возникающих при гравитационном сжатии и вращении.

Факт возникновения электростатического поля внутри проводника под действием гравитационных сил экспериментально установлен более двадцати лет назад [1, 2]. В результате теоретических исследований в этой области был разработан ряд подходов к описанию данного явления (см., напр., [3—5]). Применение различных моделей и существенная неоднозначность в оценках гравитационной поляризации указывают на то, что появление электрического поля вызвано, вероятно, несколькими физическими причинами.

Основной причиной перераспределения зарядов в экспериментах [1, 2] с химически однородными проводниками при постоянной температуре является, по-видимому, бароэлектрический эффект [6], сущность которого заключается в следующем. Наличие в проводнике неоднородных давлений, вызванных гравитационным сжатием вещества, обусловливает неравномерное распределение энергии, а следовательно, и химического потенциала электронов в среде. По этой причине должны происходить переходы электронов из областей с большими в области с меньшими давлениями до тех пор, пока электрохимический потенциал не станет постоянным во всех точках вещества.

В основе настоящей работы лежит условие постоянства электрохимического потенциала [6], которое эквивалентно выполнению соотношения

$$\operatorname{grad}\left\{ \boldsymbol{W} + \frac{E^2}{8\pi} \right\} = 0,$$

(1)