КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов

(кафедра математики)

Излагается асимптотическая процедура приближенного решения интегро-дифференциальных уравнений динамической теории вязкоупругости для сред с относительно быстро изменяющимися свойствами. Описанная методика предназначена для расчета колебательных и волновых процессов.

В работе [1] рассматривалась модельная одномерная задача о защите изделия от вибраций с помощью вязкоупругого мелкослоистого амортизатора. Эта задача сводилась к интегро-дифференциальному уравнению с коэффициентами, периодически зависящими от быстро изменяющегося параметра.

Здесь рассматривается более общая трехмерная задача о распространении возмущений в неоднородной вязкоупругой среде. Подобные задачи представляют интерес при изучении сейсмических воздействий и при расчете устройств защиты от волновых и импульсных воздействий.

Свойства изучаемой среды могут быстро изменяться по произвольному закону в некотором фиксированном направлении (направление стратификации), например по координате x_1. Это обстоятельство учитывается введением «быстрой» переменной $\xi=x_1/\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$. Систематическое изложение методов исследования процессов в средах с периодически изменяющимися свойствами содержится в работе [2]. Как известно, свойства вязкоупругой среды могут описываться интегро-дифференциальными уравнениями, содержащими интегральные операторы вольтерровского типа [3].

Исходная система уравнений теории вязкоупругости принимается в виде

$$\rho(\xi)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{\sigma}_{ij}+f_i(\xi, u),\ u=\{u_1, u_2, u_3\},\quad i=1, 2, 3,$$
$$\tilde{\sigma}_{ij}=\delta_{ij}\tilde{\lambda}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\tilde{\mu}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\equiv\sigma_{ij}(\xi, u)-\varepsilon\tilde{\sigma}_{ij}(\xi, u). \tag{1}$$

В (1) $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ — интегральные операторы вязкоупругости. Например,

$$\tilde{\lambda}\varphi=\lambda(\xi)\varphi-\varepsilon\tilde{R}_\lambda\varphi\equiv\lambda(\xi)\varphi-\varepsilon\int_{-\infty}^{t}R_\lambda(\xi, t-s)\varphi(s)\,ds,$$

$\tilde{\mu}\varphi$ имеет аналогичную структуру.

Вообще говоря, для учета малой вязкости при интегральном члене возможен произвольный малый параметр, не связанный с введенным выше параметром ε, учитывающим быстрое изменение свойств среды. При решении конкретных динамических задач к (1) следует добавить граничные условия и условия, характеризующие зависимость решения от времени (начальные условия, условия периодичности и т. п.).

Для асимптотического решения уравнений типа (1) используем некоторое преобразование исходной системы. Сначала преобразуем (1) к системе уравнений первого порядка относительно производных по ξ — координате стратификации:

$$\frac{\partial u_i}{\partial\xi}=\varepsilon A^{-1}_{ij}\left\{v_j-B^{(\alpha)}_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}+\varepsilon\left[\tilde{A}_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_1}+\tilde{B}^{(\alpha)}_{jk}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial v_\beta}{\partial \xi}=\varepsilon\left\{\rho\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sigma_{\alpha\beta}(\xi,\ u)-\varepsilon\widetilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\xi,\ u)\right]+f_\beta\right\},$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi}=\varepsilon\left\{\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}+f_1\right\},\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ \alpha,\ \beta=2,\ 3. \tag{2}$$

Здесь $v_i=\widetilde{\sigma}_{i1}\equiv\sigma_{i1}(\xi,\ u)-\varepsilon\widetilde{\sigma}_{i1}(\xi,\ u)$, которые можно записать в виде

$$v_i=A_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}+B_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}-\varepsilon\left[\widetilde{A}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}+\widetilde{B}_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha}\right],\quad \alpha=2,\ 3. \tag{3}$$

В (3) A_{ij} и $B_{ij}^{(\alpha)}$ — матрицы, содержащие упругие модули $\lambda(\xi)$ и $\mu(\xi)$ (A_{ij} — диагональная), а $\widetilde{A}_{ij}$ и $\widetilde{B}_{ij}^{(\alpha)}$ — соответствующие операторы, учитывающие вязкость.

Далее рассмотрим преобразование переменных u_i и v_i, использующее идею осреднения. Положим

$$u_i=\bar{u}_i^{(1)}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)+\varepsilon\bar{u}_i^{(2)}+\varepsilon U_i^{(1)}(\xi, x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)+\varepsilon^2 U_i^{(2)}+\dots,$$
$$v_i=\bar{v}_i^{(1)}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)+\varepsilon\bar{v}_i^{(2)}+\varepsilon V_i^{(1)}(\xi,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)+\varepsilon^2 V_i^{(2)}+\dots. \tag{4}$$

Подставляя искомый вид (4) в систему (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему для определения коэффициентов преобразования (4). Для членов порядка ε имеем

$$\frac{\partial\bar{u}_i^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial\xi}=A_{ij}^{-1}\bar{v}_j^{(1)}-A_{ij}^{-1}B_{jk}^{(\alpha)}\frac{\partial\bar{u}_k^{(1)}}{\partial x_\alpha}\equiv F_i^{(1)},$$
$$\frac{\partial\bar{v}_\beta^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_\beta^{(1)}}{\partial\xi}=\rho\frac{\partial^2\bar{u}_\beta^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sigma_{\alpha\beta}(\xi,\ \bar{u})\right]+f_\beta\equiv F_\beta^{(2)},$$
$$\frac{\partial\bar{v}_1^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial\xi}=\rho\frac{\partial^2\bar{u}_1^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial\bar{v}_\alpha^{(1)}}{\partial x_\alpha}+f_1\equiv F^{(3)}.$$

Приравнивая друг другу не зависящие от ξ и зависящие от ξ слагаемые, приходим к осредненной системе первого приближения:

$$\frac{\partial\bar{u}_i^{(1)}}{\partial x_1}=\langle A_{ij}^{-1}\rangle\bar{v}_j^{(1)}-\langle A_{ij}^{-1}B_{jk}^{(\alpha)}\rangle\frac{\partial\bar{u}_k^{(1)}}{\partial x_\alpha}\equiv\langle F_i^{(1)}\rangle,$$
$$\frac{\partial\bar{v}_\beta^{(1)}}{\partial x_1}=\langle\rho\rangle\frac{\partial^2\bar{u}_\beta^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\langle\sigma_{\alpha\beta}(\xi,\ \bar{u}^{(1)})\rangle\right]+\langle f_\beta\rangle\equiv\langle F_\beta^{(2)}\rangle, \tag{5}$$
$$\frac{\partial\bar{v}^{(1)}}{\partial x_1}=\langle\rho\rangle\frac{\partial^2\bar{u}_1^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial\bar{v}_\alpha^{(1)}}{\partial x_\alpha}+\langle f_1\rangle\equiv\langle F^{(3)}\rangle$$

и уравнениям для определения быстрых поправок $U_i^{(1)}$ и $V_i^{(1)}$:

$$\frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial\xi}=F_i^{(1)}-\langle F_i^{(1)}\rangle,\quad \frac{\partial V_\beta^{(1)}}{\partial\xi}=F_\beta^{(2)}-\langle F_\beta^{(2)}\rangle,\quad \frac{\partial V_1^{(1)}}{\partial\xi}=F^{(3)}-\langle F^{(3)}\rangle.$$

Здесь символ $\langle f\rangle$ означает осреднение функции f по явно входящему аргументу ξ при фиксированных значениях остальных аргументов. Отметим, что для периодической структуры средние $\langle f\rangle$ являются средними по периоду структуры [2].

Для учета малой вязкости необходимо рассмотреть члены второго порядка в (2) после подстановки (4). Приравнивая коэффициенты при ε^2, находим:

$$\frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial U_i^{(2)}}{\partial \xi} = A_{ij}^{-1}(\bar{v}_j^{(2)} + V_j^{(1)}) - \frac{\partial U_i^{(1)}}{\partial x_1} -$$

$$- A_{ij}^{-1}\left\{B_{jk}^{(\alpha)}\left(\frac{\partial \bar{u}_k^{(2)}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial x_\alpha}\right) + \widetilde{A}_{jk}\left(\frac{\partial \bar{u}_k^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial U_k^{(1)}}{\partial \xi}\right) + \widetilde{B}_{jk}^{(\alpha)}\frac{\partial \bar{u}_k^{(1)}}{\partial x_\alpha}\right\},$$

$$\frac{\partial \bar{v}_\beta^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_\beta^{(2)}}{\partial \xi} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{u}_\beta^{(2)} + U_\beta^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\sigma_{\alpha\beta}(\xi, \bar{u}_\beta^{(2)} + U_\beta^{(1)})] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_\alpha}[\widetilde{\sigma}_{\alpha\beta}(\xi, \bar{u}^{(1)})],$$

$$\frac{\partial \bar{v}_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1^{(2)}}{\partial \xi} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{u}_1^{(2)} + U_1^{(2)}) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\bar{v}_1^{(2)} + V_1^{(2)}).$$

Снова приравнивая члены, не зависящие от ξ и зависящие от ξ, получаем уравнения для «медленных» поправок $\bar{u}_i^{(2)}$ и $\bar{v}_i^{(2)}$ к решению осредненной системы первого приближения (5) и для «быстрых» поправок $U_i^{(2)}$ и $V_i^{(2)}$ второго приближения. В уравнениях для «медленных» поправок $\bar{u}_i^{(2)}$ и $\bar{v}_i^{(2)}$ интегральные операторы, учитывающие вязкость, действуют на известные функции, полученные на предыдущем этапе решения задачи в первом приближении.

Если для построения приближенного решения системы (2) ограничиться функциями, входящими в замену переменных (4) до членов порядка ε^2 включительно, то такое приближенное решение удовлетворяет системе (2) с невязкой порядка ε^2. Отметим также, что это решение удовлетворяет (1) с невязкой, имеющей, вообще говоря, порядок ε.

Изложенная асимптотическая методика позволяет рассчитывать колебательные и волновые процессы в вязкоупругих средах с быстро изменяющимися свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Медведев Г. Н., Моргунов Б. И.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. 30, № 4. С. 78. [2] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М., 1984. [3] Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.

Поступила в редакцию
31.05.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1

УДК 577.33

БЕЗАКТИВАЦИОННЫЙ ЭЛЕКТРОННЫЙ ТРАНСПОРТ В ПЕРВИЧНЫХ ПРОЦЕССАХ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ БАКТЕРИАЛЬНОГО ФОТОСИНТЕЗА

А. К. Кукушкин, Р. Г. Садыгов

(кафедра биофизики)

В рамках золотого правила Ферми оценивается скорость электронного переноса от димера к мономеру бактериохлорофилла в реакционном центре бактерии Rhodopseudomonas viridis. Рассматривается безактивационный путь переноса электрона.

В 1976 г. Д. Джортнер, основываясь на золотом правиле Ферми, получил формулу для скорости первичного разделения зарядов в реакционном центре (РЦ) бактерий [1]. В дальнейшем по формуле Джортнера были проведены расчеты этой скорости в РЦ разных бактерий [2, 3]. Полученные результаты близки к экспериментально наблюдаемым [4]. Однако существование в формуле Джортнера такого па-