УДК 535.14

О БЛИЖАЙШИХ К КЛАССИЧЕСКИМ СОСТОЯНИЯХ МОДЫ КВАНТОВАННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

П. В. Елютин

(кафедра квантовой радиофизики)

Рассматриваются состояния моды квантованного электромагнитного поля, ближайшие к одновременно собственным состояниям операторов рождения и уничтожения фотонов. Показано, что такие состояния отличны от когерентных, но переходят в них в предельных случаях слабых и сильных полей.

В квантовой радиофизике исключительно важную роль играют когерентные состояния моды квантованного электромагнитного поля $|\alpha\rangle$, которые определяются как собственные состояния оператора уничтожения фотона: $\hat{a}|\alpha\rangle=\alpha|\alpha\rangle$. Часто встречается утверждение, что такие состояния являются ближайшими к классическим состояниям поля [1—3]. Основным аргументом в пользу этой близости является то, что произведение неопределенностей координаты Δq и импульса Δp осциллятора поля достигает минимального значения $\Delta q\Delta p=\hbar/2$ именно для когерентного состояния [1, 2]. Однако тем же свойством обладают и сжатые состояния [4, 5], на классичность не претендующие. Поэтому аргумент несостоятелен, а вопрос открыт.

Целью настоящей заметки является определение свойств состояний моды квантованного электромагнитного поля, ближайших к классическим в смысле определения, приведенного ниже.

Векторный потенциал одной моды классического электромагнитного поля может быть представлен, например, в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\mathbf{A}_0\{\beta\exp\{i\mathbf{kr}-\omega t\}+\beta^*\exp\{-i\mathbf{kr}\,\omega t\}\}.$$

Соответствующий оператор квантованного векторного потенциала имеет вид

$$\hat{\mathbf{A}}(r,\ t)=\mathbf{A}_0[\hat{a}\exp\{i\mathbf{kr}\}+\hat{a}^+\exp\{-i\mathbf{kr}\}],$$

где $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ — операторы рождения и уничтожения фотона. Полное совпадение результатов классической и квантовой теории будет достигнуто, если $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ можно заменить комплексно сопряженными числами β и β^*. В точности это невозможно по двум причинам: во-первых $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ не коммутируют, а во-вторых, $\hat{a}^+$ вообще не имеет нормированных собственных векторов. Потребуем наименьшего уклонения состояний от «одновременно собственных для $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$», взяв в качестве меры отклонения величину

$$D(\varphi)=\|\hat{a}|\varphi\rangle-\beta|\varphi\rangle\|^2+\|\hat{a}^+|\varphi\rangle-\beta^*|\varphi\rangle\|^2.$$

Такое определение D — не единственно возможное, но вполне естественное: оно использует идею метода наименьших квадратов. Состояния, реализующие минимум величины $D(\varphi)$ при дополнительном условии нормируемости вектора $|\varphi\rangle$, будем называть ближайшими к классическим (БК-состояниями).

Разложим искомое $|\varphi\rangle$ по стационарным состояниям $|n\rangle$ моды поля:

$$|\varphi\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}b_n|n\rangle.$$

Варьируя функционал $D(\varphi)-\lambda\|\varphi\|^2$ (здесь λ — множитель Лагранжа), для коэффициентов b_n получим рекуррентные соотношения

$$(2n+1+2|\beta|^2-\lambda)\,b_n-2\beta^*\sqrt{n+1}\,b_{n+1}-2\beta\sqrt{n}\,b_{n-1}=0\quad(n\geqslant 1),\qquad(1)$$

$$(1+|\beta|^2-\lambda)\,b_0-2\beta^*b_1=0.\qquad(2)$$

Непосредственно из (1) видно, что БК-состояния синхронны: если минимум достигается при $t=0$ и значении $\beta(0)$, то он будет иметь место и при $t\neq0$ для значения $\beta(t)=\beta(0)\exp(-i\omega t)$. Поэтому далее без ограничения общности считаем β действительным.

В случае $\beta \ll 1$ следует ожидать быстрого убывания коэффициентов b_n с ростом $n: b_n \gg b_{n+1}$. В этом предположении трехчленную рекуррентную формулу (1) можно заменить двучленной. Из требования совместности (1) и (2) при этом получаем $\lambda \approx 1+\beta^2$ и

$$b_{n+1} \approx b_n \frac{\beta \sqrt{n+1}}{n+1+(\beta^2/2)}.$$

Это выражение отличается от рекуррентной формулы для когерентных состояний последним членом в знаменателе. Таким образом, при малых β БК-состояния совпадают с когерентными с точностью до членов порядка β^2.

В случае $\beta \gg 1$ естественно ожидать значительного вклада состояний с большими n. Считая $b(n)$ плавной функцией, стандартными приемами квазиклассики в энергетическом представлении [6] сведем рекуррентное соотношение (1) к дифференциальному уравнению

$$-\frac{d^2 b}{dn^2} + b\left(\frac{\sqrt{n}}{\beta} + \frac{1+2\beta^2-\lambda}{2\beta\sqrt{n}} - 2\right) = 0.$$

Его можно рассматривать как уравнение Шрёдингера для семейства потенциалов $U(n;\ \lambda,\ \beta)$. Параметр λ определяется из условия наличия в потенциале уровня с $E=2$. Для минимального собственного значения задача является квазиклассической (борновский параметр $B \sim \beta^4 \gg 1$); поэтому вблизи минимума потенциал $U(n)$ может быть заменен параболической ямой. Отсюда

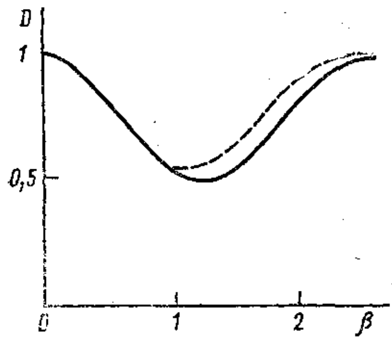
$$b(n) \approx \exp\left\{-\frac{(n-\beta^2)^2}{4\beta^2}\right\}.$$

Это выражение совпадает с главным членом асимптотики для когерентного состояния с $\alpha=\beta$. Таким образом, при больших β БК-состояния совпадают с когерентными по крайней мере с точностью до членов порядка β^{-2}.

Для решения вопроса о существовании и величине отличия когерентных и БК-состояний в промежуточной области обратимся к численному расчету (рисунок). Для когерентных состояний $|\alpha\rangle$ минимум $D(\alpha)$ достигается при значении β, равном

$$\beta = \alpha^{-1} \exp(\alpha^2)\left[(1+2\alpha^2 \exp(-\alpha^2))^{1/2} - 1\right].$$

Зависимость $D(\beta)$ для когерентных состояний имеет минимум $D=0{,}536$ при $\beta=1{,}15$. Для БК-состояний минимум $D=0{,}505$ достигается при $\beta=1{,}20$. Наибольшее отличие $D(\beta)$ для когерентных и БК-состояний составляет 0,104 и достигается при $\beta=2{,}0$; в этой точке скалярное произведение когерентного и БК-состояний минимально и равно 0,990.



Зависимость функции отклонения D от параметра β для БК-состояний (сплошная линия) и когерентных состояний (штриховая)

Таким образом, БК-состояния моды квантованного электромагнитного поля, не совпадая в формальном смысле с когерентными, переходят в них в предельных случаях $\beta \to 0$ и $\beta \to \infty$, а численно — близки к ним при любых β.

Автор благодарит Л. В. Келдыша, Д. Н. Клышко и В. Б. Брагинского за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1971. С. 50—52. [2] Файн В. М. Квантовая радиофизика. Т. 1. Фотоны и нелинейные среды. М., 1972. С. 62—71. [3] Лоудон Р. Квантовая теория света. М., 1976. С. 221. [4] Клышко Д. Н. Физические основы квантовой электроники. М., 1986. С. 258. [5] Смирнов Д. Ф., Трошин А. С.//УФН. 1987. 153, № 2. С. 293. [6] Елютин П. В.//ДАН СССР. 1987. 294, № 5. С. 1089.

Поступила в редакцию
25.06.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 1

РАДИОФИЗИКА

УДК 533.951

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЕРХНЕГИБРИДНЫЕ ВОЛНЫ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ПЛАЗМЫ

И. М. Алешин, Л. С. Кузьменков, О. О. Трубачев

(кафедра теоретической физики)

Найдено и исследовано решение релятивистских кинетических уравнений Власова—Максвелла в кубическом по полю приближении для верхнегибридных волн, распространяющихся перпендикулярно внешнему магнитному полю.

Изучение нелинейных верхнегибридных волн в рамках релятивистской кинетической теории плазмы имеет самостоятельный интерес. Кроме того, такие волны при распространении перпендикулярно магнитному полю могут эффективно ускорять заряженные частицы [1, 2].

Найдем стационарное решение самосогласованной системы уравнений Власова—Максвелла для верхнегибридных волн, распространяющихся вдоль оси $0x$ перпендикулярно внешнему магнитному полю $\mathbf{B}=(0,\ 0,\ B_0)$ в кубическом по амплитуде волны E приближении. Пр этом предполагается, что $v_E/c=eE/(mc\omega)\ll 1$ и поле B_0 не слишком сильное: $\omega_B/\omega_p\ll 1$, где ω_B и ω_p — циклотронная и плазменная частоты соответственно.

Учитывая, что для верхнегибридной волны движением ионов можно пренебречь и ее поперечная составляющая порядка EB_0, уравнения Власова—Максвелла сведем к системе уравнений

$$\begin{gathered}V^{(\mathrm{IV})}+\omega_0^2\ddot V+\mu_1\dot V^2+\mu_2\ddot\omega^3+\mu_3\omega_B^2V+\mu_4\omega_BW=0,\\ W^{(\mathrm{IV})}-\varkappa^2\ddot W+\eta_1\omega_B\ddot V+\eta_2\omega_B\dddot V\dot V+\eta_3\omega_B\dot V^2+\eta_4\ddot W\ddot V+\eta_5\dot W\dddot V=0\end{gathered}\tag{1}$$

для функций V и W таких, что $\ddot V=-eE_x$, $\ddot W=-eE_y$; точкой обозначено дифференцирование по переменной $\tau\equiv t-x/v_{\mathrm{ph}}$; v_{ph} — фазовая скорость волны. Коэффициенты уравнений (1) являются функциями фазовой скорости и температуры плазмы T. Общий вид этих функций и их асимптотики для фазовых скоростей, близких к скорости света, даются формулами

$$\omega_0^2=-4\pi e^2\int v_x\frac{1}{\Delta}\frac{\partial f_0}{\partial p_x}d^3p\simeq\omega_p^2K_2^{-1}(\alpha)\left[K_1(\alpha)+\frac{2}{\alpha}K_0(\alpha)\right];$$

$$\mu_1=-2\pi e^2\int v_x\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2f_0\,d^3p\simeq-\frac{3\omega_p^2}{2mc}\left(1+\frac{2K_1(\alpha)}{\alpha K_2(\alpha)}\right);$$

$$\mu_2=-\frac{2\pi e^3}{3}\int v_x\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial p_x}\right)^2f_0d^3p\simeq-\frac{2\omega_p^2}{(mc)^2}\left[\frac{6}{\alpha}+\frac{K_1(\alpha)}{K_2(\alpha)}\right];$$