ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12 : 531.51

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ

В. А. Короткий, Ю. Н. Обухов

(кафедра теоретической физики)

Получено точное решение для электромагнитных волн в космологической модели с вращением типа Гёделя. Показано, что характер распространения и спектр волн определяются только вращением и не зависят от причинной структуры пространства-времени.

Задача нахождения решений классических волновых уравнений в искривленном пространстве-времени является важным аспектом фундаментальных исследований в современной теории гравитации. Этот интерес связан, во-первых, с возможностью наблюдения влияния пространственно-временного континуума на распространение физических полей (классический пример — красное смещение в спектрах галактик, обусловленное расширением Вселенной). Во-вторых, большой интерес к теории квантованных материальных полей в искривленном пространстве-времени также стимулирует создание соответствующего каталога классических решений различных волновых уравнений. Главное препятствие в решении данной проблемы — сложность классических волновых уравнений во всех, за исключением простейших, искривленных пространствах.

Цель данной статьи — решение классического волнового уравнения для электромагнитного поля во вселенной типа Гёделя. Эта космологическая модель позволяет исследовать различные свойства физических полей, связанные с глобальным вращением. Подобно тому как космология Фридмана является простейшей космологией, позволяющей выявить свойства, вызванные расширением Вселенной, так и вселенная (типа) Гёделя является простейшей космологией для изучения эффектов, связанных с вращением Вселенной.

Ранее нами было показано [1, 2], что сам факт существования космологического вращения не противоречит современным наблюдательным данным, в том числе изотропии микроволнового фонового излучения, данным ядерной космохронологии и т. п. Поэтому вполне вероятно, что предлагаемое исследование представляет не только теоретический, но и практический интерес.

Однородное пространство-время во вселенной типа Гёделя описывается метрикой

$$ds^2 = dt^2 - (dx^2 + k\exp\{2mx\}\,dy^2 + dz^2) - 2\sqrt{\sigma}\exp\{mx\}\,dt\,dy, \qquad (1)$$

где t, x, y, z — координаты; k, m, σ — константы. Условие $k \geqslant 0$ обеспечивает корректную причинную структуру пространства-времени: отсутствие замкнутых времениподобных кривых (во вселенной Гёделя $k/\sigma = -1/2$). Считаем, что Вселенная заполнена спинирующей материей, элементами которой в современную эпоху являются галактики или

кластеры галактик [3, 4]. Угловая скорость вращения пространства (1)

$$\omega_{\alpha\beta} = -\sqrt{\sigma}\, m \exp\{mx\}\, \delta^1_{[\alpha}\delta^2_{\beta]},$$

$$\omega = \left|\frac{1}{2}\,\omega_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right| = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{k+\sigma}}. \tag{2}$$

Часто задачу об электромагнитных волнах в гравитационном поле сводят к решению задачи об электромагнитных волнах в плоском пространстве, которое заполнено некоторой «средой». «Электрические» и «магнитные» свойства последней определяются (конформно-инвариантными) величинами, построенными из метрического тензора $g_{\mu\nu}$ [5]. Уравнения Максвелла в такой «среде»:

$$S_i^{\pm} = \varepsilon_{ij}F_j^{\pm} \pm i\,(\mathbf{G}\times\mathbf{F}^{\pm})_i, \tag{3}$$

$$\frac{1}{i}\nabla\times\mathbf{F}^{\pm} = \pm\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}^{\pm}. \tag{4}$$

$$\nabla\mathbf{S}^{\pm} = 0 \tag{5}$$

полностью определяют свойства электромагнитных волн в гравитационном поле [6]. Здесь $\varepsilon_{ij} = \mu_{ij} = -(-g)^{1/2}g^{ij}/g_{00}$ и $G_i = -g_{0i}/g_{00}$; $\mathbf{F} = \mathbf{E} \pm i\mathbf{H}$ и $\mathbf{S}^{\pm} = \mathbf{D} \pm i\mathbf{B}$, где

$$D_i = \delta_{ij}E_j - (\mathbf{G}\times\mathbf{H})_i, \tag{6}$$

$$B_i = \mu_{ij}H_j + (\mathbf{G}\times\mathbf{E})_i. \tag{7}$$

Несложный расчет показывает, что в метрике (1)

$$\mathbf{G} = (0,\ \sqrt{\sigma}/r,\ 0),\ \varepsilon_{11} = \sqrt{k+\sigma}/r,\ \varepsilon_{22} = r/\sqrt{k+\sigma},\ \varepsilon_{33} = \sqrt{k+\sigma}/r,$$

где r — новая переменная, введенная соотношением $r = \exp\{-mx\}$; соответственно $\partial/\partial x = -mr\partial/\partial r$.

Ищем решение уравнений электромагнитного поля (3)—(5) в виде

$$\mathbf{F}^{\pm} = \Phi(r)\exp\{ik_2^{\pm}y + ik_3^{\pm}z - i\Omega t\}. \tag{8}$$

В результате подстановки (8) в (3)—(5) получим следующую систему уравнений:

$$ik_2^{\pm}\Phi_3^{\pm} - ik_3^{\pm}\Phi_2^{\pm} - i\Omega\frac{\sqrt{\sigma}}{r}\Phi_3^{\pm} = \pm\frac{\sqrt{k+\sigma}}{r}\Omega\Phi_1^{\pm}, \tag{9}$$

$$ik_3^{\pm}\Phi_1^{\pm} + mr\Phi_{3,r}^{\pm} = \pm\frac{r}{\sqrt{k+\sigma}}\Omega\Phi_2^{\pm}, \tag{10}$$

$$-ik_2^{\pm}\Phi_1^{\pm} + i\Omega\frac{\sqrt{\sigma}}{r}\Phi_1^{\pm} - mr\Phi_{2,r}^{\pm} = \pm\frac{\sqrt{k+\sigma}}{r}\Omega\Phi_3^{\pm}, \tag{11}$$

где $\Phi(r) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$.

Преобразуем (9)—(11) надлежащим образом и найдем

$$\Phi_1^{\pm} = i\left[\pm\frac{r\Omega}{\sqrt{k+\sigma}\,(\Omega^2 - k_3^{\pm 2})}\left(k_2^{\pm} - \Omega\frac{\sqrt{\sigma}}{r}\right)\Phi_3^{\pm} - \frac{mrk_3^{\pm}}{(\Omega^2 - k_3^{\pm 2})}\Phi_{3,r}^{\pm}\right], \tag{12}$$

$$\Phi_2^{\pm}=\frac{1}{(\Omega^2-k_3^{\pm 2})}\left[k_3^{\pm}\left(\Omega\frac{\sqrt{\sigma}}{r}-k_2^{\pm}\right)\Phi_3^{\pm}\pm m\sqrt{k+\sigma}\,\Omega\Phi_{3,r}^{\pm}\right], \tag{13}$$

$$\frac{d^2\Phi_3^{\pm}}{dr^2}+\left(-\alpha^2+\frac{\beta}{r}-\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\right)\Phi_3^{\pm}=0. \tag{14}$$

В (14) введены следующие обозначения:

$$\alpha=\frac{k_2^{\pm}}{m\sqrt{k+\sigma}}, \tag{15}$$

$$\beta=\frac{2\Omega\sqrt{\sigma}\,k_2^{\pm}}{m^2(k+\sigma)}, \tag{16}$$

$$\nu=-\frac{1}{2}+\left[\frac{(k_3^{\pm}\pm\omega)^2}{m^2}+\frac{k}{k+\sigma}\left(\frac{1}{4}-\frac{\Omega^2}{m^2}\right)\right]^{1/2}. \tag{17}$$

Ясно, что функция $\Phi(r)$ должна быть конечной и однозначной. Из (12)—(17) легко видеть, что при $k_2^{\pm}=0$ (электромагнитная волна распространяется вдоль оси z) не существует ограниченных решений. Поскольку данный вывод не зависит от соотношения между σ и k, то он будет справедлив и в модели Гёделя ($k/\sigma=-1/2$), что было показано в работе [6].

Теперь рассмотрим случай, когда $k_2^{\pm}>0$. Детальный анализ уравнений (12)—(17) показывает, что единственным решением, удовлетворяющим условию конечности и однозначности Φ_1, Φ_2, Φ_3, является следующее:

$$\Phi_3=c\exp\{-u/2\}\,u^{1+\nu}L_n^{(1+2\nu)}(u),$$
$$\nu\geqslant 0, \tag{18}$$

где $u=2\alpha r$; $n=0, 1, 2\ldots$; $L_n^{(1+2\nu)}$ — полином Лагерра; c — произвольная постоянная. Частота Ω определяется по формуле

$$\Omega=2(1+k/\sigma)(1+\nu+n)\,\omega. \tag{19}$$

Из (19), учитывая условие причинности ($k/\sigma\geqslant 0$), получим

$$\begin{aligned}&\Omega\geqslant 2(1+k/\sigma)\,\omega\geqslant 2\omega\,(m>0),\\&\Omega\leqslant -2(1+k/\sigma)\,\omega\leqslant -2\omega\,(m<0),\end{aligned} \tag{20}$$

т. е. во вселенной типа Гёделя не могут распространяться электромагнитные волны с частотой меньше чем $2\omega(1+k/\sigma)$. Чтобы лучше представить смысл неравенства (20), предположим, например, что значение угловой скорости ω порядка $(\sigma/k)H$ (параметр Хаббла $H\sim 1{,}6\times\times 10^{-18}$ с$^{-1}$). Тогда $\tilde{\nu}\approx 2H\approx 3{,}2\cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$, или $\lambda=c/\tilde{\nu}=c/2H\approx 10^{28}$ см. То есть неравенство (20), возможно, указывает на довольно естественное ограничение: во Вселенной не могут распространяться электромагнитные волны с длиной волны больше размеров Вселенной.

Нетрудно видеть, что во вселенной Гёделя, где существуют замкнутые времениподобные линии ($k/\sigma=-1/2$), вместо (19) и (20) имеем [6]

$$\Omega=(1+\nu+n)\,\omega,$$
$$\Omega\geqslant\omega,$$

т. е. граница допустимых частот здесь в $2(1+k/\sigma)$ раз «ниже».

Из (17) и (19) найдем дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2=(k_3^{\pm})^2 \pm 2\omega k_3^{\pm} + 2\omega\Omega(1+2n^{\pm}) - m^2 n^{\pm}(n^{\pm}+1), \tag{21}$$

где $n^{\pm}=0, 1, 2, \ldots$. Из (21) видно, что при фиксированном $k_3^{\pm}$ частота Ω имеет дискретный спектр.

Проводя аналогичные расчеты для $k_2^{\pm}<0$ и вводя переменную $u=-2\alpha r$, получим то же решение (18), а вместо (19) и (20) имеем

$$\Omega=-2(1+k/\sigma)(1+\nu+n)\,\omega\,\mathrm{sgn}(m), \tag{22}$$

$$\Omega\leqslant-2\omega. \tag{23}$$

Соответствующее данному случаю дисперсионное соотношение получается из (21) заменой $\Omega\to-\Omega$. Из формул (19)—(20), (22)—(23) видно, что характер распространения электромагнитных волн (положительная, отрицательная частотность; направление распространения), а также эффект возникновения дискретного спектра частот Ω связаны с глобальным вращением Вселенной (и его направлением), а не с причинной структурой пространства-времени (нарушением причинности), как считалось ранее [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иваненко Д., Короткий В., Обухов Ю.//Астрон. цирк. АН СССР. 1987. № 1510. С. 2. [2] Obukhov Yu. N.//Gauge Theories of Fundamental Interactions. Banach Centre Proceedings. Warsaw, 1989. [3] Короткий В. А., Обухов Ю. Н.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 4. С. 6. [4] Obukhov Yu. N., Korotky V. A.//Class. Quant. Grav. 1987. 4. P. 1633. [5] Скроцкий Г. В.//ДАН СССР. 1957. 114. С. 73. [6] Mashhoon B.//Phys. Rev. 1975. D11. P. 2679.

Поступила в редакцию
03.07.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 2

УДК 621.372.81

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

А. Н. Боголюбов, Т. В. Едакина

(кафедра математики)

Дан обзор современных вариационно-разностных методов расчета диэлектрических волноводов, в частности световодов. Рассматриваются основные проблемы, возникающие при использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей в вариационной постановке для решения задач о распространении электромагнитных волн в прямых диэлектрических волноводах, однородных вдоль направляющей оси, со сложной формой поперечного сечения и сложным профилем диэлектрической проницаемости. Рассматриваются различные виды вариационной постановки, различные способы ограничения области и учета поведения поля на бесконечности, способы сведения исходной задачи к алгебраической проблеме собственных значений и вычисления собственных значений и собственных векторов. Особое место уделяется проблеме борьбы с не имеющими физического смысла фиктивными решениями, так называемыми «духами».

В предлагаемой работе рассматриваются основные проблемы, возникающие при использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей в вариационной постановке (или вариационно-