Из (17) и (19) найдем дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2=(k_3^{\pm})^2\pm 2\omega k_3^{\pm}+2\omega\Omega(1+2n^{\pm})-m^2n^{\pm}(n^{\pm}+1), \tag{21}$$

где $n^{\pm}=0, 1, 2, \ldots$. Из (21) видно, что при фиксированном $k_3^{\pm}$ частота $\Omega$ имеет дискретный спектр.

Проводя аналогичные расчеты для $k_2^{\pm}<0$ и вводя переменную $u=-2\alpha r$, получим то же решение (18), а вместо (19) и (20) имеем

$$\Omega=-2(1+k/\sigma)(1+\nu+n)\omega\,\mathrm{sgn}\,(m), \tag{22}$$

$$\Omega\leqslant-2\omega. \tag{23}$$

Соответствующее данному случаю дисперсионное соотношение получается из (21) заменой $\Omega\to-\Omega$. Из формул (19)—(20), (22)—(23) видно, что характер распространения электромагнитных волн (положительная, отрицательная частотность; направление распространения), а также эффект возникновения дискретного спектра частот $\Omega$ связаны с глобальным вращением Вселенной (и его направлением), а не с причинной структурой пространства-времени (нарушением причинности), как считалось ранее [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иваненко Д., Короткий В., Обухов Ю.//Астрон. цирк. АН СССР. 1987. № 1510. С. 2. [2] Obukhov Yu. N.//Gauge Theories of Fundamental Interactions. Banach Centre Proceedings. Warsaw, 1989. [3] Короткий В. А., Обухов Ю. Н.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1987. 28, № 4. С. 6. [4] Obukhov Yu. N., Korotky V. A.//Class. Quant. Grav. 1987. 4. P. 1633. [5] Скроцкий Г. В.//ДАН СССР. 1957. 114. С. 73. [6] Mashhoon B.//Phys. Rev. 1975. D11. P. 2679.

Поступила в редакцию
03.07.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 2

УДК 621.372.81

# ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ

**А. Н. Боголюбов, Т. В. Едакина**

*(кафедра математики)*

**Дан обзор современных вариационно-разностных методов расчета диэлектрических волноводов, в частности световодов. Рассматриваются основные проблемы, возникающие при использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей в вариационной постановке для решения задач о распространении электромагнитных волн в прямых диэлектрических волноводах, однородных вдоль направляющей оси, со сложной формой поперечного сечения и сложным профилем диэлектрической проницаемости. Рассматриваются различные виды вариационной постановки, различные способы ограничения области и учета поведения поля на бесконечности, способы сведения исходной задачи к алгебраической проблеме собственных значений и вычисления собственных значений и собственных векторов. Особое место уделяется проблеме борьбы с не имеющими физического смысла фиктивными решениями, так называемыми «духами».**

В предлагаемой работе рассматриваются основные проблемы, возникающие при использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей в вариационной постановке (или вариационно-разностных методов) для решения задач о распространении электромагнитных волн в диэлектрических волноводах, в частности световодах.

Предполагается, что волновод является прямым и однородным вдоль направляющей оси.

Подчеркнем, что выбор конкретного пути решения во многом зависит от характера поставленной задачи и от возможностей, предоставляемых доступными исследователям вычислительными средствами. Стремление эффективно решить задачу приводит к необходимости более полно учитывать ее специфику, что в свою очередь порождает новые модификации методов.

## § 1. Вводные замечания

Попытки применить метод конечных элементов (МКЭ) к расчету волноводных структур, в частности световодов, относятся к середине шестидесятых годов, чему способствовали следующие обстоятельства. Во-первых, к этому времени техника МКЭ была уже хорошо разработана и успешно применялась к граничным задачам механики. Во-вторых, были выписаны и исследованы вариационные функционалы для волноводов произвольного типа (Берк [1], Курокава [2], Никольский [3]). В-третьих, применение вариационного принципа при решении задач МКЭ приводит к симметричным разреженным матрицам, для обработки которых на ЭВМ были построены соответствующие алгоритмы и созданы достаточно эффективные программы. Работы [4—8] иллюстрируют возможность осуществления указанной идеи, правда, пока для экранированных световодов (т. е. металлических волноводов, заполненных диэлектриками и использующихся в оптическом диапазоне). Позднее [9] описанная в первых работах техника была обобщена на открытые структуры произвольной формы сечения. Казалось бы, задача решена, и многие исследователи обратились к предложенной методике как к самой многообещающей и перспективной. Однако на практике все оказалось гораздо сложнее.

Прежде всего выяснилось, что не все получаемые решения имеют физический смысл (т. е. соответствуют распространяющимся волнам), и возникла необходимость каким-либо образом отсеивать ложные моды (иногда мы будем называть их «духами»).

Далее, оказалось, что в зависимости от физических свойств направляющей среды, а также от выбранного метода исключения «духов» в различных случаях удобнее выбирать различные вариационные формулировки, в которых функционалы выражаются через наиболее подходящие для данной задачи компоненты электромагнитного поля.

Кроме того, при описании свойств открытых волноводов приходится искать эффективный способ аппроксимации решений на бесконечности или ограничения исследуемой области.

Наконец, возможности доступных исследователям ЭВМ и имеющегося на них математического обеспечения существенно влияют на выбор алгоритма сведения вариационной задачи к алгебраической проблеме собственных значений (будет ли это делаться методом конечных разностей, конечных элементов первого или более высоких порядков) и определяют способ обработки получаемых матриц и вычисления их собственных значений и собственных векторов.

Указанная специфика применения МКЭ, а также аналогичная специфика применения вариационно-разностного метода к задачам расчета диэлектрических волноводов и световодов привели к появлению обширной журнальной литературы, краткий обзор которой и составляет содержание настоящей статьи.

## § 2. Вариационные выражения

Решение интересующей нас задачи начинается с ее вариационной постановки. В сочетании с методами конечных элементов и конечных разностей используется несколько типов вариационных выражений.

Самой простой и экономичной (в смысле размерности получаемых матриц) является скалярная формулировка, дающая хорошие результаты при описании свойств изотропных кусочно-однородных волноводов [4, 5, 10—13]. При дополнительном условии слабой проводимости материала волновода удается расширить область применения данной постановки, включая неоднородные изотропные волноводы [14, 15]. Более того, в работе [16] скалярная формулировка обобщена на случай однородных анизотропных волноводов, сечения которых составлены из прямоугольников, с ненулевыми недиагональными элементами в тензоре диэлектрической проницаемости. Однако для общих неоднородных и (или) анизотропных задач скалярная формулировка неприменима. Полноты ради следует отметить, что, видимо, в силу положительной определенности скалярных функционалов каждое найденное решение имеет физический смысл [10, 15].

Волноводы с более общим неоднородным и (или) анизотропным заполнением целесообразнее описывать с помощью векторной постановки (она включает функционалы нескольких видов). Но в этом случае возникает целый ряд не имеющих физического смысла решений («духов»), попытки избавиться от которых усложняют решение задачи.

Векторная $E_z/H_z$-постановка выделяется среди других тем, что она записывается через непрерывные аксиальные компоненты поля, что дает значительную экономию вычислительных ресурсов. Это и обусловило ее широкое использование [9,6—8, 17—20] даже в анизотропных задачах (правда, при диагональном тензоре диэлектрической проницаемости) [10]. Но все преимущества двухкомпонентности в $E_z/H_z$-постановке исчезают при попытках выявить и отсеять возникающие ложные решения: введение в функционал дополнительных членов, а также апостериорная проверка результатов усложняют алгоритмы и делают их менее эффективными. С этой точки зрения удобнее применять наиболее универсальную трехкомпонентную постановку: через непрерывный во всем пространстве вектор $H$ [21—31] или через требующий выполнения дополнительных условий сопряжения на границах раздела диэлектрических сред вектор $E$. Причем $H$-формулировка выгоднее для решения открытых задач, а $E$-формулировкой удобнее пользоваться в задачах с ферритовыми включениями внутри световодов и в закрытых задачах [32, 33].

Не останавливаясь подробно, отметим, что векторная постановка включает также редко употребляемые из-за низкой эффективности в сочетании с методом конечных элементов функционалы, записывающиеся через поперечные компоненты поля или через векторы $E$ и $H$ одновременно (получаемые в итоге матрицы имеют очень большие размеры). Однако здесь все же следует упомянуть о новом векторном вариационном подходе, использующем поперечные $E_t/H_t$-компоненты, предложенном в работе [34] для решения общих анизотропных неоднородных задач. Неудобство его заключается в том, что он требует значительных затрат памяти ЭВМ, хотя и позволяет легко отсеивать «духи».

## § 3. Ограничение области

Если рассматривается задача о закрытом световоде, то поделить область, в которой ищется решение, на элементарные ячейки — «конечные элементы» — несложно. Но как только задача становится открытой и решение необходимо искать во всей бесконечной плоскости поперечного сечения, то возникают трудности, связанные с тем, что необходимо каким-либо образом ограничить разбиваемую область и разумно аппроксимировать решение (т. е. электромагнитное поле бегущей волны) на бесконечности.

Самый простой способ — предположить, что на некотором довольно большом расстоянии от волновода (чтобы не вносить существенных возмущений в решение) находится электрическая или магнитная стенка, поле на которой можно положить равным нулю [9, 10, 16, 19, 20, 25, 27, 28]. Такое упрощение оправданно физически, так как вне световода электромагнитное поле распространяющейся волны убывает экспоненциально, причем коэффициент затухания зависит от постоянной распространения, и на определенном расстоянии от направляющей оси становится пренебрежимо малым. Оптимальное расстояние от оси световода до вводимой виртуальной стенки приходится подбирать экспериментально, что вносит нежелательный дополнительный параметр в задачу. Кроме того, внешней по отношению к световоду (или комбинации световодов) области, представленной в виде набора ячеек, соответствует при указанном подходе основная часть элементов получаемых матриц, что приводит к хранению и обработке довольно большого количества излишней информации (особенно если ищется решение вблизи отсечки, когда поля значительно выходят за пределы волновода). Следовательно, ограничение поперечного сечения нулевой стенкой — это наиболее простое, но не очень эффективное средство избавиться от трудностей представления решения на бесконечности.

В работе [17] описанный метод несколько улучшен: расстояние до искусственной стенки подбирается в соответствии с выписанным критерием для плотности потока энергии через нее.

Более точно поведение поля в бесконечности описывается с помощью введения так называемых «бесконечных элементов» — элементов, которые действительно простираются в бесконечность и не ограничены по площади. Пробные функции в них должны быть квадратично интегрируемы для удовлетворения условиям на бесконечности и должны реально представлять затухание поля [12, 21, 25]. Чтобы избежать нелинейности получаемых алгебраических уравнений, затухающий множитель в пробных функциях приходится выбирать в виде простейшей экспоненты, что неизбежно вносит ошибку в вычисленные поля [10]. Очевидно, такой метод экономичнее, несмотря на то что сохраняет в задаче подбираемые экспериментально произвольные параметры. Однако его точность удовлетворяет не всех исследователей [29].

Другие известные алгоритмы представления решения в бесконечности (разложение поля во внешней области по модифицированным функциям Бесселя [18]; комбинация МКЭ с интегральным уравнением на поверхности [29]; «пузырьковый алгоритм» или рекуррентное моделирование внешней области [15]; конформное отображение бесконечной области в конечную и использование изопараметрических элементов [14] и другие [21, 29]) сложнее реализовать, но в некоторых случаях они оказываются наиболее приемлемыми, эффективными и точными.

## § 4. Способы сведения исходной задачи к алгебраической проблеме собственных значений

После того как вариационная задача поставлена, стационарное значение функционала находится численно с помощью одного из стандартных алгоритмов метода конечных элементов [35] или конечных разностей [19]. Тем самым исходная задача приводится к системе алгебраических уравнений, записываемой в виде обобщенной проблемы собственных значений:

$$Ax=\lambda Bx, \tag{1}$$

где $x$ — вектор-столбец неизвестных значений компонент поля в точках сетки, $\lambda$ — искомое собственное значение, через которое находится постоянная распространения бегущей волны, матрицы $A$ и $B$ — эрмитовы сильно разреженные ленточные матрицы большого порядка.

Оказывается, что если пользоваться методом конечных разностей, который в вариационной постановке совпадает с методом прямоугольных конечных элементов первого порядка [19], матрицы в (1) имеют максимальную разреженность, $B$ становится диагональной и в вещественном случае положительной и формула (1) легко сводится (см. [19]) к стандартной задаче на собственные значения вида

$$A'y=\lambda y, \tag{2}$$

где $y=B^{1/2}x$, $A=B^{-1/2}AB^{-1/2}$, и имеет те же свойства, что и матрица $A$. Задача (2) значительно проще для решения на ЭВМ, чем задача (1), особенно если искать собственные значения и собственные векторы, учитывая специфические особенности матрицы $A$ (ленточность, разреженность, симметричность).

Но, ссылаясь на относительно малую скорость сходимости метода конечных разностей [19] и метода конечных элементов первого порядка [9, 10, 12, 17, 18, 21—23, 29, 34], многие исследователи предпочитают использовать дающие более точный результат при таких же размерах матриц методы конечных элементов высоких порядков [10, 12, 13, 22], особенно второго [15, 16, 24, 25, 28, 30, 32, 36, 37]. Однако при этом матрицы получаются более заполненными и приходится решать обобщенную задачу (1). Кроме того, алгоритмы вычисления элементов матриц значительно усложняются, так что использование конечных элементов порядка выше четвертого оказывается нецелесообразным [10].

Иногда для более точной аппроксимации границ исследуемой области используют изопараметрические [11, 14, 17] и криволинейные [20] квадратичные элементы. И все-таки, как показывает практика, с этой целью при моделировании волноводов со сложной формой поперечного сечения выгоднее применять большое количество простейших линейных элементов [12, 21, 23].

При расчете характеристик закрытых волноводов произвольной формы сечения с острыми металлическими углами эффективно введение, наряду с обычными, сингулярных базисных функций.

Вообще же выбор способа приведения вариационной задачи к алгебраической определяется главным образом размерами ресурсов (в том числе оперативной памяти) доступных ЭВМ и наличием в математическом обеспечении необходимых программ вычисления собственных значений и собственных векторов для матриц специального вида.

## § 5. Вычисление собственных значений и собственных векторов

Перейдем теперь к вопросу о способе обработки полученных на предыдущем шаге задач (1) и (2).

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы — одна из самых сложных проблем линейной алгебры [38]. Стандартная математическая схема — составить характеристический полином, найти его корни, а затем решить систему для собственных векторов — за исключением самых тривиальных случаев непригодна в качестве практически используемой вычислительной процедуры [39].

В конечноэлементных задачах, как правило, приходится иметь дело с матрицами очень больших порядков. Если задача закрытая и/или удается эффективно использовать имеющуюся в ней симметрию, то можно получить матрицы сравнительно небольшого размера (до 300 элементов в строке). При этом ошибки округления еще не сказываются, размеры оперативной памяти позволяют хранить матрицы и запоминать преобразования над ними. В таких случаях применимы обычные численные методы нахождения собственных значений и собственных векторов [38—42], т. е. разложение Холесского для матрицы $B$ (если речь идет об обобщенной задаче (1)) и переход к стандартной задаче на собственные значения вида (2) [15—17], приведение обрабатываемой матрицы к более простой подобной трехдиагональной форме путем прямых вращений Гивенса [12, 19] или отражений Хаусхолдера [16, 17, 20, 23, 25, 28], вычисление собственных значений полученной трехдиагональной матрицы с помощью метода бисекций [14, 16, 17], последовательностей Штурма [14, 19] или $QR$-($QL$-) алгоритма [16, 23], нахождение, наконец, обратным итерированием собственных векторов [14, 19, 20].

В открытых задачах со сложной геометрией сечения, когда невозможно учесть симметрию, число элементов в матричной строке может превышать 1000 (большинство из них — нули). Теперь, как правило, нельзя применять преобразования матрицы, так как при этом нарушается ее структура и резко возрастает как объем вычислений, так и объем требуемой памяти ЭВМ. По существу, единственной возможной операцией над матрицей остается операция умножения на вектор [38]. Можно сказать, что пока не разработан удовлетворительный алгоритм вычисления собственных значений и собственных векторов больших разреженных матриц общего вида [39]. Но при определенных обстоятельствах оказываются полезными степенной метод [38—40, 42], метод обратных итераций [38—40, 42], комбинированный метод неполного разложения Холесского и сопряженных градиентов [12], фронтальный алгоритм [29], метод минимизации следа матрицы [31]. Наиболее перспективно выглядят метод итерирования подпространства [39, 42] и на его основе разработанный [22] алгоритм для произвольно разреженных матриц [21—23], а также методы типа Ланцоша [38, 39, 42, 43]. Подчеркнем, что ни один из перечисленных методов нельзя рекомендовать в качестве универсального. Каждый из них имеет свои недостатки и требует осторожности и определенного искусства в применении, однако дает хотя бы какую-то возможность решать спектральные задачи для очень больших разреженных матриц.

## § 6. Решения, не имеющие физического смысла

Остановимся, наконец, на вопросах, связанных с появлением в спектре вычисленных собственных значений таких, которые не соответствуют физически распространяющимся в волноводе модам (назовем их ложными). Причины этого явления до сих пор полностью не выяснены [10, 17—19, 21, 23, 29], однако свойства таких псевдорешений — «духов» — изучены достаточно хорошо [10, 17—20, 22, 23, 29, 32], что позволяет обсуждать возможные методы выделения истинных мод.

Замечено, что «духи» отсутствуют в скалярной постановке вариационной задачи, но возникают во всех видах векторной формулировки [6—10, 14, 17—20, 22—29, 32, 34, 37, 44—47]. Количество их растет, а дисперсионные характеристики смещаются при увеличении числа конечных элементов, а следовательно, их можно обнаружить, следя за сходимостью решения [18, 23] или поведением дисперсионных кривых [17, 19, 44] при измельчении сетки.

Исследования собственных векторов, соответствующих ложным собственным значениям, показали, что электромагнитные поля фиктивных мод изменяются в плоскости поперечного сечения волновода произвольным образом вопреки физическому смыслу [7, 20].

В ряде случаев удается несколько уменьшить количество не имеющих физического смысла решений путем более точного учета с помощью множителей Лагранжа условий сопряжения для компонент поля на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости [10, 45]. С точки зрения математики этот факт трудно объяснить, потому что, как правило, указанные условия являются естественными для выписываемых функционалов (видимо, их нарушение происходит при дискретизации задачи) [10].

Наиболее часто в качестве теста используется факт нарушения для «духов» дивергентных уравнений Максвелла. Так, например, в [21] и [22] вычисляется $\operatorname{div} H$ найденных полей и отсеиваются те «моды», для которых $\operatorname{div} H$ значительно отличается от нуля. Здесь следует отметить, что все перечисленные выше способы выделения истинных решений мало эффективны, носят апостериорный характер, часто приводят к сильному усложнению алгоритмов и возрастанию объема вычислений [10, 21, 23]. А можно ли исключить «духи» *a priori*, до нахождения собственных значений? С этой точки зрения используется предложенный независимо несколькими группами исследователей метод штрафных функций [23—25, 27, 31—33]. С их помощью в трехкомпонентный функционал вводится дополнительный дивергентный член, навязывающий выполнение необходимых уравнений Максвелла. При этом вид и порядок матриц не изменяются, а вычислительные затраты увеличиваются незначительно. Есть здесь и нежелательные стороны: в задачу вводится произвольная положительная постоянная (штрафной коэффициент), от величины которой зависит точность решения и степень вытеснения ложных мод [27, 28, 32]. В работе [27] предложен способ уточнения решения в методе штрафных функций — метод экстраполяции к нулю, но в этом случае задачу приходится решать дважды для различных значений параметра штрафа. Перспективно выглядят два метода полного исключения «духов»: одновременно с конечноэлементной задачей в векторной $H$-постановке с помощью метода Галеркина [28, 30] или таких же конечных элементов [26] решается дополнительная задача, полученная из уравнения Максвелла:

$$\operatorname{div} B=0, \tag{3}$$

что приводит к исчезновению из спектра собственных значений тех, которые не имеют физического смысла.

Собственные значения, соответствующие псевдорешениям, в отличие от истинных будут комплексными, если воспользоваться векторной вариационной постановкой через поперечные компоненты электромагнитного поля ($E$ и $H$), выписанной в работе [34]. Однако тогда задача становится очень объемной по отношению к памяти ЭВМ.

На отсутствие «духов» указывается в работе [29], где применяется комбинированный метод конечных элементов и уравнений для поверхностных интегралов, но этот алгоритм довольно сложно реализуем.

Вообще, появление ложных мод — едва ли не самая трудная проблема в решении волноводных задач с помощью конечных элементов или конечных разностей в вариационной постановке, и, по нашему мнению, к ней еще не раз обратятся исследователи в поисках наиболее простых и экономичных способов выявления реально распространяющихся в волноводе волн.

ЛИТЕРАТУРА.

[1] Berk A. D.//IRE Trans. Antennas Propagat. 1956. **AP-4**, N 4. P. 104. [2] Kurokawa K.//IRE Trans. Microwave Theory Techn. 1962. **MTT-10**, N 3. P. 314. [3] Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., 1967. [4] Ahmed S.//Electron. Lett. 1968. **4**, N 6. P. 387. [5] Silvester P.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1969. **MTT-17**, N 4. P. 204. [6] Ahmed S., Daly P.//Proc. IEE. 1969. **116**, N 10. P. 1661. [7] Csendes Z. J., Silvester P.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1970. **MTT-18**, N 12. P. 1124. [8] Daly P.//Ibid. 1971. **MTT-19**, N 1. P. 19. [9] Yeh C., Dong S. B., Oliver W.//J. Appl. Phys. 1975. **46**, N 5. P. 2125. [10] Mabaya N., Lagasse P. E., Vandenbulcke P.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1981. **MTT-29**, N 6. P. 600. [11] Hayata K., Koshiba M.. Suzuki M.//Electron. Lett. 1986. **22**, N 3. P. 127. [12] Pantić Z., Mittra R.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1986. **MTT-34**, N 11. P. 1096. [13] Israel M., Miniowitz R.//Ibid. 1987. **MTT-35**, N 11. P. 1019. [14] Wu R.-B., Chen C. H.//IEEE J. Quant. Electron. 1986. **QE-22**, N 5. P. 603. [15] Chiang K. S.//J. Lightwave Technology. 1986. **LT-4**, N 8. P. 980. [16] Koshiba M., Hayata K., Suzuki M.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1984. **MTT-32**, N 6. P. 587. [17] Ikeuchi M., Sawami H., Niki H.//Ibid. 1981. **MTT-29**, N 3. P. 234. [18] Oyamada K., Okoshi T.//Radio Science. 1982. **17**, N 1. P. 109. [19] Schweig E., Bridges W. B.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1984. **MTT-32**, N 5. P. 531. [20] Welt D., Webb J.//Ibid. 1985. **MTT-33**, N 7. P. 576. [21] Rahman B. M. A., Davies J. B.//Ibid. 1984. **MTT-32**, N 1. P. 20. [22] Davies J. B., Fernandez F. A., Philippou G. Y.//Ibid. 1982. **MTT-30**, N 11. P. 1280. [23] Rahman B. M. A., Davies J. B.//Ibid. 1984. **MTT-32**, N 8. P. 922. [24] Koshiba M., Hayata K., Suzuki M.//J. Lightwave Technology. 1986. **LT-4**, N 2. P. 121. [25] Hayata K., Koshiba M., Suzuki M.//Ibid. P. 133. [26] Kobelansky A. J., Webb J. P.//Electron. Lett. 1986. **22**, N 11. P. 569. [27] Hayata K., Eguchi M., Koshiba M., Suzuki M.//J. Lightwave Technology. 1986. **LT-4**, N 8. P. 1090. [28] Hayata K., Koshiba M., Eguchi M., Suzuki M.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1986. **MTT-34**, N 11. P. 1120. [29] Su C. C//Ibid. P. 1140. [30] Hayata K., Miura K., Koshiba M.//Ibid. 1988. **MTT-36**, N 2. P. 268. [31] Webb J. P.//Ibid. 1988. **MTT-36**, N 12. P. 1819. [32] Koshiba M., Hayata K., Suzuki M.//Ibid. 1985. **MTT-33**, N 10. P. 900. [33] Koshiba M., Hayata K., Suzuki M.//Appl. Optics. 1986. **25**, N 1. P. 10. [34] Angkaew T., Matsuhara M., Kumagai N.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1987. **MTT-35**, N 2. P. 117. [35] Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М., 1986. [36] Suzuki M., Koshiba M.//Radio Science. 1982. **17**, N 1. P. 85. [37] Koshiba M., Kumagami H., Suzuki M.//J. Lightwave Technology. 1985. **LT-3**, N 4. P. 773 [38] Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М., 1984.

[39] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., 1986. [40] Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970. [41] Тюарсон Р. Разреженные матрицы. М., 1977. [42] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений: численные методы. М., 1983. [43] Бурман З. И., Артюхин Г. А., Зархин Б. Я. Программное обеспечение матричных алгоритмов и метода конечных элементов в инженерных расчетах. М., 1988. [44] Corr D. G., Daves J. B.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1972. **MTT-20**, N 10. P. 669. [45] Konrad A.//Ibid. 1976. **MTT-24**, N 9. P. 553. [46] Konrad A.//Ibid. 1977. **MTT-25**, N 5. P. 353. [47] Нао М.//Ibid. 1984. **MTT-32**, N 10. P. 1275.

Поступила в редакцию
03.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 2

УДК 517.958

## О ЗАОСТРЕНИИ ВОЛН, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ УИЗЕМА

**Н. О. Томилина**

*(кафедра математики)*

**Доказывается, что в случае абсолютно интегрируемого непрерывного ядра уравнения Уизема кусочно-гладкое (заостренное) в начальный момент возмущение остается кусочно-гладким во все время существования решения задачи Коши.**

Для описания широкого круга нелинейных физических процессов в сильно диспергирующих средах Уизем [1] предложил одномерное модельное уравнение

$$u_t+uu_x+\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(x-\xi)\,u_\xi(\xi,\ t)\,d\xi=0. \tag{1}$$

Уравнение Уизема является весьма общим, оно включает в себя при соответствующем выборе ядра $\mathcal{K}(x)$ многие известные нелинейные уравнения, в частности уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ), Бюргерса, Бенджамена—Оно, так называемое «промежуточное» уравнение и другие. Уравнение Уизема встречается в теории поверхностных и внутренних волн в жидкости, в гидродинамике бесстолкновительной плазмы, в нелинейной оптике, нелинейной акустике и т. д. [2—6].

Уравнение Уизема соединяет в себе типичную для гидродинамики нелинейность и общий закон линейной дисперсии. Дисперсионное соотношение для уравнения (1) имеет вид

$$c(k)=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-ikx\}\,\mathcal{K}(x)\,dx,$$

в частности, для уравнения КдФ $c(k)=c_0-\gamma k^2$, где $\gamma$, $c_0$ — константы; для уравнения Бюргерса $c(k)=-ik$; для уравнения Бенджамена—Оно $c(k)=-|k|$.

Исследования показали, что уравнение Уизема описывает практически все основные специфические эффекты в теории нелинейных волн, в частности устойчивые волновые образования типа уединенных волн, солитонный (частицеподобный) характер их взаимодействия, возникновение предельной амплитуды, разрушение волн и другие явления.