[39] Ортега Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., 1986. [40] Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970. [41] Тюарсон Р. Разреженные матрицы. М., 1977. [42] Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений: численные методы. М., 1983. [43] Бурман З. И., Артюхин Г. А., Зархин Б. Я. Программное обеспечение матричных алгоритмов и метода конечных элементов в инженерных расчетах. М., 1988. [44] Corr D. G., Daves J. B.//IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1972. **MTT-20**, N 10. P. 669. [45] Konrad A.//Ibid. 1976. **MTT-24**, N 9. P. 553. [46] Konrad A.//Ibid. 1977. **MTT-25**, N 5. P. 353. [47] Hano M.//Ibid. 1984. **MTT-32**, N 10. P. 1275.

Поступила в редакцию
03.10.90

ВЕСТН. МОСК./УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 2

УДК 517.958

О ЗАОСТРЕНИИ ВОЛН, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЕМ УИЗЕМА

Н. О. Томилина

(кафедра математики)

Доказывается, что в случае абсолютно интегрируемого непрерывного ядра уравнения Уизема кусочно-гладкое (заостренное) в начальный момент возмущение остается кусочно-гладким во все время существования решения задачи Коши.

Для описания широкого круга нелинейных физических процессов в сильно диспергирующих средах Уизем [1] предложил одномерное модельное уравнение

$$u_t + uu_x + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x-\xi)\, u_\xi(\xi, t)\, d\xi = 0. \tag{1}$$

Уравнение Уизема является весьма общим, оно включает в себя при соответствующем выборе ядра $\mathcal{K}(x)$ многие известные нелинейные уравнения, в частности уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ), Бюргерса, Бенджамена—Оно, так называемое «промежуточное» уравнение и другие. Уравнение Уизема встречается в теории поверхностных и внутренних волн в жидкости, в гидродинамике бесстолкновительной плазмы, в нелинейной оптике, нелинейной акустике и т. д. [2—6].

Уравнение Уизема соединяет в себе типичную для гидродинамики нелинейность и общий закон линейной дисперсии. Дисперсионное соотношение для уравнения (1) имеет вид

$$c(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ikx\}\, \mathcal{K}(x)\, dx,$$

в частности, для уравнения КдФ $c(k) = c_0 - \gamma k^2$, где γ, c_0 — константы; для уравнения Бюргерса $c(k) = -ik$; для уравнения Бенджамена—Оно $c(k) = -|k|$.

Исследования показали, что уравнение Уизема описывает практически все основные специфические эффекты в теории нелинейных волн, в частности устойчивые волновые образования типа уединенных волн, солитонный (частицеподобный) характер их взаимодействия, возникновение предельной амплитуды, разрушение волн и другие явления.

Значительный интерес представляет вопрос о заострении волн, описываемых уравнением Уизема. Возможность заострения связана с возникновением разрыва производной решения $u_x(x, t)$. Уизем показал [1], что волны, описываемые уравнением Уизема, могут при определенных условиях иметь предельную амплитуду и заостряться. Рассматривая экспоненциальное ядро $\mathscr{K}_0(x)=\mu\exp\{-\nu|x|\}$, где μ, ν — некоторые константы, Уизем показал, что гребни волн предельной амплитуды заостряются (угол при вершине равен 110°).

Возникает вопрос: как будет вести себя со временем решение уравнения Уизема, если в начальный момент оно имело заострение? Будет ли заострение волны сохраняться или оно с течением времени разгладится? Целью данной работы является доказательство теоремы о том, что в случае непрерывного и абсолютно интегрируемого ядра уравнения Уизема заострение волны будет сохраняться в течение всего времени существования решения.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Уизема:

$$u_t+uu_x+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathscr{K}(x-\xi)\,u_\xi(\xi, t)\,d\xi=0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=\bar{u}(x), \tag{3}$$

где ядро $\mathscr{K}(x)$ непрерывно и абсолютно интегрируемо на R_1, т. е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{K}(x)|\,dx<\infty$, а начальная функция непрерывна на R_1 и имеет скачок первой производной в точке $x=0$, т. е. волна заострена в начальный момент.

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (2)—(3).

Определение. Обобщенным решением задачи (2)—(3) назовем функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, t)$ непрерывна, а ее первая и вторая производные кусочно-непрерывны в любом прямоугольнике $\Pi_T=\{(x, t): a<x<b,\ 0<t_1<t<t_2<T\}$, где $T>0$ — время существования решения;

2) существует константа $M>0$ такая, что

$$|u_x(x, t)|<M,\ |u_{xx}(x, t)|<M \quad \forall (x, t)\in\Pi_T;$$

3) $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Pi_T}\left[u\psi_t+\left(\frac{u^2}{2}+\widehat{K}u\right)\psi_x\right]dxdt=0 \tag{4}$$

$$\forall\,\Pi_T,\ \forall\,\psi(x, t)\in C_0^\infty(\Pi_T),$$

где $\widehat{K}u=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathscr{K}(x-\xi)\,u(\xi, t)\,d\xi$;

4) $u(x, 0)=\bar{u}(x)$.

Не ограничивая общности, будем полагать, что функция $u_x(x, t)$ может иметь единственный разрыв, представляющий собой на плоскости (x, t) линию $S=\{(x, t): x=x_0(t)\}$.

Теорема. Пусть ядро $\mathscr{K}(x)$ уравнения Уизема непрерывно и абсолютно интегрируемо ($\mathscr{K}(x)\in L_1(R_1)$), начальная функция $\bar{u}(x)$ непрерывна, а ее производная терпит разрыв в точке $x=0$, причем $\bar{u}'(+0)=C_1<\infty$, $\bar{u}'(-0)=C_2<\infty$; $C_1\neq C_2$. Тогда разрыв первой произ-

водной по x обобщенного решения задачи (2)—(3) сохранится в течение всего времени существования решения.

Доказательство. Нетрудно показать, что всюду вне линии возможного разрыва производных обобщенное решение задачи (2)—(3) удовлетворяет уравнению Уизема в обычном классическом смысле. Для этого следует проинтегрировать тождество (4) по частям в любом прямоугольнике, не содержащем S, воспользовавшись непрерывной дифференцируемостью обобщенного решения вне линии S.

Докажем теперь справедливость соотношения Гюгонио, а именно покажем, что при условии существования разрыва производных обобщенного решения задачи (2)—(3) в каждой точке линии разрыва $x=x_0(t)$ выполнено соотношение $\dot{x}_0(t)=u(x, t)$.

В тождестве (4) в качестве бесконечно дифференцируемой и финитной в Π_T функции выберем $\psi(x, t)=\varphi_x(x, t)$. Интегрируя по частям тождество (4), с учетом непрерывности функции $u(x, t)$ в Π_T получим

$$\int\limits_{\Pi_T}\left[v\varphi_t+\left(uv+\frac{\partial}{\partial x}(\widehat{K}u)\right)\varphi_x\right]dxdt=0,$$

где $v(x, t)\equiv u_x(x, t)$. Нетрудно показать, используя непрерывность функции $u(x, t)$ в любом прямоугольнике (в том числе и содержащем линию S), что $\frac{\partial}{\partial x}(\widehat{K}u)=\widehat{K}v$. Таким образом, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет тождеству (4), то функция $v(x, t)$ удовлетворяет следующему тождеству:

$$\int\limits_{\Pi_T}[v\varphi_t+(uv+\widehat{K}v)\varphi_x]\,dxdt=0 \tag{5}$$

$$\forall\,\Pi_T=\{(x, t): a<x<b,\ 0<t_1<t<t_2<T\},\quad \forall\,\varphi(x, t)\in C_0^\infty(\Pi_T).$$

Повторяя рассуждения, приведенные в начале доказательства, нетрудно показать, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет вне линии разрыва уравнению

$$v_t+\frac{\partial}{\partial x}(uv+\widehat{K}v)=0. \tag{6}$$

Преобразуем формулу (5) отдельно в частях $\Pi_T^{(1)}$ и $\Pi_T^{(2)}$, на которые линия S делит прямоугольник Π_T. Производя замену переменных и интегрируя по частям, получим

$$I_1\equiv\int\limits_{\Pi_T^{(1)}}\left[v\varphi_t+\left(uv+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(x-\xi)v(\xi, t)\,d\xi\right)\varphi_x\right]dxdt=$$

$$=\int\limits_S\varphi\left[v^+\cos(\widehat{nt})+\left(uv^++\lim_{\Delta\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)v(x_0(t)+\Delta-\xi, t)\,d\xi\right)\times\right.$$

$$\left.\times\cos(\widehat{nx})\right]ds-\int\limits_{\Pi_T^{(1)}}\varphi\left[v_t+\left(uv+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)v(x-\xi, t)\,d\xi\right)_x\right]dxdt=$$

$$=\int\limits_S\varphi\left[v^+\cos(\widehat{nt})+(uv^++F^+)\cos(\widehat{nx})\right]ds;$$

$$I_2 \equiv \int\limits_{\Pi_T^{(2)}} \left[v\varphi_t + \left(uv + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x-\xi)\, v(\xi, t)\, d\xi\right)\varphi_x\right] dxdt =$$

$$= -\int\limits_S \varphi\, [v^- \cos(\widehat{nt}) + (uv^- + F^-) \cos(\widehat{nx})]\, ds.$$

Здесь учтено, что функция $v(x, t)$ в $\Pi_T^{(1)}$ и $\Pi_T^{(2)}$ удовлетворяет уравнению (6), v^+ и v^- — предельные значения функции $v(x, t)$ на кривой S при стремлении к ней справа и слева,

$$F^{\pm} \equiv \lim_{\Delta \to +0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi)\, v(x_0(t) \pm \Delta - \xi, t)\, d\xi.$$

Складывая полученные формулы, в силу (5) получим

$$0 = \int\limits_{\Pi_T} \left[v\varphi_t + \left(uv + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x-\xi)\, v(\xi, t)\, d\xi\right)\varphi_x\right] dxdt = I_1 + I_2 =$$

$$= \int\limits_S \varphi\, \{[v] \cos(\widehat{nt}) + (u[v] + [F]) \cos(\widehat{nx})\}\, ds;$$

где $[v] \equiv v^+ - v^- \neq 0$, $[F] \equiv F^+ - F^-$; в силу произвольности функции $\varphi(x)$

$$[v] \cos(\widehat{nt}) + (u[v] + [F]) \cos(\widehat{nx}) = 0.$$

Поскольку

$$\cos(\widehat{nt}) = \frac{\dot{x}_0(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}_0^2(t)}}, \quad \cos(\widehat{nx}) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \dot{x}_0^2(t)}},$$

получим $\dot{x}_0(t)[v] = u[v] + [F]$ или $\dot{x}_0(t) = u + [F]/[v]$.

Рассмотрим интеграл

$$[F] = \lim_{\Delta \to +0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\xi)\, (v(x_0(t) + \Delta - \xi, t) - v(x_0(t) - \Delta - \xi, t))\, d\xi.$$

Поскольку $|u_\xi(\xi, t)| < M$, а $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{K}(\xi)|\, d\xi < \infty$, подынтегральное выражение имеет интегрируемую мажоранту, а предельные значения $v(x_0(t) \pm \pm 0 - \xi, t)$ существуют справа и слева от линии $x_0(t)$. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла. Подынтегральное выражение оказывается тождественно равным нулю всюду, за исключением одной точки, где функция $v(\xi, t)$ терпит разрыв; следовательно, $[F] \equiv 0$.

Итак, доказано соотношение Гюгонио $\dot{x}_0(t) = u(x, t)$. Таким образом, линия S возможного разрыва производных обобщенного решения задачи (2)—(3) совпадает с характеристикой для уравнения Уизема.

Продифференцируем (2) по x вне линии S:

$$u_{xt} + u_x^2 + uu_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(x-\xi)\, u_\xi(\xi, t)\, d\xi = 0. \tag{7}$$

Разбивая интеграл на два интеграла, производя замену переменных и дифференцирование, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(x-\xi)u_\xi(\xi,\ t)\,d\xi=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int\limits_{x-x_0(t)}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)u_x(x-\xi,\ t)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{x-x_0(t)}\mathcal{K}(\xi)u_x(x-\xi,\ t)\,d\xi\Big)\equiv\frac{\partial}{\partial x}(j_1+j_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_1=-\mathcal{K}(x-x_0(t))u_x(x_0(t)-0,\ t)+\int\limits_{x-x_0(t)}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)u_{xx}(x-\xi,\ t)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_2=\mathcal{K}(x-x_0(t))u_x(x_0(t)+0,\ t)+\int\limits_{-\infty}^{x-x_0(t)}\mathcal{K}(\xi)u_{xx}(x-\xi,\ t)d\xi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(j_1+j_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)u_{xx}(x-\xi,\ t)\,d\xi+I_0(x,\ t),$$

где $I_0(x,\ t)\equiv\mathcal{K}(x-x_0(t))[u_x(x_0(t)+0,\ t)-u_x(x_0(t)-0,\ t)]$. Таким образом, (7) принимает вид

$$u_{xt}+u_x^2+uu_{xx}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)u_{xx}(x-\xi,\ t)\,d\xi+I_0(x,\ t)=0. \tag{8}$$

Запишем уравнение для произвольной характеристики, выпущенной из точки y:

$$\dot{x}(t)=u(x,\ t),$$

$$x|_{t=0}=y;$$

решение имеет вид $x=x(y,\ t)$.

Введем обозначение для функции $u_x(x,\ t)$ на характеристике: $w(y,\ t)\equiv u_x(x(y,\ t),\ t),\ t)$; при этом заметим, что $w_t(y,\ t)=u_{xt}+uu_{xx}$. Запишем (8) на характеристике:

$$w_t(y,\ t)+w^2(y,\ t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)u_{xx}(x(y,\ t)-\xi,\ t)\,d\xi+I_0(x(y,\ t),\ t)=0. \tag{9}$$

Рассмотрим семейство характеристик, выпущенных из точек $y\in R_1$, и перейдем в (9) к пределу при $y\to\pm 0$, т. е. будем стремиться справа и слева к характеристике, совпадающей с линией возможного разрыва производных обобщенного решения задачи (2)—(3). Этот предел существует, поскольку решение уравнения Уизема является классическим справа и слева от линии S. Получим

$$w_t^{\pm}+(w^{\pm})^2+I^{\pm}=0,$$

где

$$w^{\pm}\equiv w(\pm 0,\ t),\ I^{\pm}\equiv\lim_{\Delta\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{K}(\xi)u_{xx}(x(0\pm\Delta,\ t)-\xi,\ t)\,d\xi+I_0(x_0(t),\ t).$$

Вычтем теперь из одного уравнения другое. Учитывая непрерывность ядра $\mathscr{K}(\xi)$ и вводя обозначения

$$g(t)\equiv w^+-w^-,\ f(t)\equiv w^++w^-,$$

$$I\equiv I^+-I^-=\lim_{\Delta\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{K}(\xi)\,[u_{xx}(x(0+\Delta,\ t)-\xi,\ t)-$$

$$-u_{xx}(x(0-\Delta,\ t)-\xi,\ t)]\,d\xi,$$

получим следующую задачу:

$$g_t+fg+I=0, \tag{10}$$

$$g(0)=g_0, \tag{11}$$

где $g_0\equiv C_1-C_2\neq0$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, легко показать, что $I\equiv0$. Следовательно, задача (10)—(11) принимает вид

$$g_t+fg=0,$$

$$g(0)=g_0,$$

откуда

$$g(t)=g_0\exp\left\{-\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\}.$$

Итак, мы получили, что функция $g(t)=u_x(+0,\ t)-u_x(-0,\ t)$ при $t\in[0,\ T]$ не обращается в нуль, т. е. заострение волны сохраняется в течение всего времени существования решения. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность И. А. Шишмареву, предложившему постановку задачи и оказавшему значительную помощь в работе, а также П. И. Наумкину за полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. [2] Климонтович Ю. Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М., 1964. [3] Кобелев Ю. А., Островский Л. А.//Нелинейная акустика. Теоретические и экспериментальные исследования. Горький, 1980. С. 143. [4] Benjamin T. B.//J. Fluid Mech. 1967. **29**, N 3. P. 559. [5] Joseph R. J.//J. Phys. A. 1977. **10**. P. 1225. [6] Leibovich S.//J. Fluid Mech. 1970. **42**. P. 802.

Поступила в редакцию
11.10.90