УДК 535.42

ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КОМПРЕССИИ И ДИСПЕРСИОННОМ РАСПЛЫВАНИИ КОГЕРЕНТНЫХ И НЕКОГЕРЕНТНЫХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Установлено существование общего динамического подобия между «сфокусированным» (т. е. прошедшим «временну́ю» линзу) и «несфокусированным» импульсами, распространяющимися в линейной среде с дисперсией второго порядка. Частным проявлением этой закономерности является известное совпадение формы импульса в дальней зоне и фокусе.

Подобие — интересная и, насколько известно, до сих пор не обсуждавшаяся в литературе особенность импульсов, распространяющихся в диспергирующей среде и порожденных одним источником. Подобие может быть использовано

— при теоретическом анализе или численных расчетах, позволяя свести более сложную задачу (компрессия импульсов) к более простой (дисперсионное расплывание);

— как метод проверки полученных результатов;

— при экспериментальных исследованиях, поскольку для измерения динамических или статистических характеристик импульсов очень малой длительности можно взять «подобный» длинный импульс, и т. п.

1. Рассмотрим распространение узкополосных импульсов в линейной среде, когда волновое число вблизи несущей частоты ω_0 импульса можно аппроксимировать выражением

$$k(\omega)=k_0+(\omega-\omega_0)k_1+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2k_2. \tag{1}$$

Для определенности дисперсию считаем нормальной, $k_2>0$. Предположим, что к границе $z=0$ среды, заполняющей область $z\geqslant 0$, подводится импульс произвольного вида с комплексной амплитудой $a_0(t)=\int a_{0,\omega}\exp\{i\omega t\}\,d\omega$, имеющий длительность $\Delta\tau_0$, спектр $g_0(\omega)=2\pi|a_{0,\omega}|^2$ с эффективной шириной $\Delta\omega_0$, энергию $U_0=\int|a_0|^2dt=\int g_0\,d\omega$. Сравним два случая: ($a$) импульс сразу поступает в диспергирующую среду, $A_{\text{in}}(t)=a_0(t)$, и (b) импульс предварительно пропускается через «временну́ю» линзу, т. е. подвергается линейной частотной модуляции, $A_{\text{in}}(t)=a_0(t)M(t)$, $M(t)=\exp\{-it^2/(2k_2f)\}$, $f\geqslant 0$. Дисперсионной характеристике (1) соответствует функция Грина $H(\theta,z)=(2\pi ik_2z)^{-1/2}\times\exp\{i\theta^2/(2k_2z)\}$, где $\theta=t-z/u$, $u=k_1^{-1}$ — групповая скорость на частоте ω_0 (см., напр., [1]). Поскольку закон модуляции в случае (b) удовлетворяет условию согласования, $M(t)\sim H^*(-t,f)$, он является оптимальным с точки зрения получения наиболее сильной компрессии вблизи фокуса $z=f$ [2, 3].

Комплексная амплитуда импульса удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z}-i\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2A}{\partial\theta^2}=0$$

и при $z \geqslant 0$ может быть представлена как $A(\theta, z) = \int A_{\text{in}}(t) H(\theta - t, z)\, dt$. В случае ($b$) имеем

$$A_b(\theta, z) = H(\theta, z) \int dt\, a_0(t) \exp\left\{\frac{it^2}{2k_2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right) - \frac{it\theta}{k_2 z}\right\}, \tag{2}$$

$$A_b(\theta_1 z) A_b^*(\theta_2, z) = \exp\{i(\theta_1^2 - \theta_2^2)/(2k_2 z)\} \mathcal{K}_b(\theta, \tau, z), \tag{3}$$

$$\mathcal{K}_b(\theta, \tau, z) = \iint \frac{a_0(t_1) a_0^*(t_2)}{2\pi k_2 z} \exp\left\{\frac{i}{k_2}\left[\frac{t_1^2 - t_2^2}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{f}\right) - \frac{\theta(t_1 - t_2)}{z} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\tau(t_1 + t_2)}{2z}\right]\right\} dt_1\, dt_2, \tag{4}$$

где $\theta_1 = \theta + \tau/2$, $\theta_2 = \theta - \tau/2$. Случай ($a$) описывается этими же формулами с $f = \infty$. Анализ структуры выражений (3) и (4) показывает, что выполняется следующий закон подобия: переход от случая (a) к более общему случаю (b) эквивалентен изменению функции $\mathcal{K}(\theta, \tau, z)$, интенсивности импульса $I(\theta, z) = \mathcal{K}(\theta, 0, z)$ и их аргументов θ, τ, z в отношении [3]:

$$\frac{\mathcal{K}_{b1}}{\mathcal{K}_a} = \frac{I_{b1}}{I_a} = \frac{\theta_a}{\theta_{b1}} = \frac{\tau_a}{\tau_{b1}} = \frac{z_a}{z_{b1}} = \frac{1}{1 - z_{b1}/f} = 1 + z_a/f \geqslant 1, \tag{5}$$

где $\mathcal{K}_{b1} = \mathcal{K}_{b1}(\theta_{b1}, \tau_{b1}, z_{b1})$ и т. д. ($z_{b1} \leqslant f$). Аналогичные формулы подобия можно получить и сравнивая случаи двух конечных f_1 и f_2 любого знака. Другой тип подобия, связанный с изменением временного масштаба функции $A_{\text{in}}(t)$, рассматривается в работе [4].

Как следует из (5), импульсы интенсивности на расстояниях

$$z_a = \frac{z_{b1}}{1 - z_{b1}/f}\ (0 \leqslant z_a < \infty), \quad z_{b1} = \frac{z_a}{1 + z_a/f}\ (0 \leqslant z_{b1} \leqslant f) \tag{6}$$

имеют одинаковую форму (рис. 1). При этом их длительности $\Delta\tau$, времена корреляции τ_{cor} и «моменты» $\langle \tau^n \rangle = U_0^{-1} \int I(\theta, z)\, \theta^n\, d\theta$ тоже должны быть связаны соотношениями (5):

$$\frac{\Delta\tau_{b1}}{\Delta\tau_a} = \frac{\tau_{\text{cor},b1}}{\tau_{\text{cor},a}} = \left[\frac{\langle \tau^n \rangle_{b1}}{\langle \tau^n \rangle_a}\right]^{1/n} = \frac{z_{b1}}{z_a} \leqslant 1, \tag{7}$$

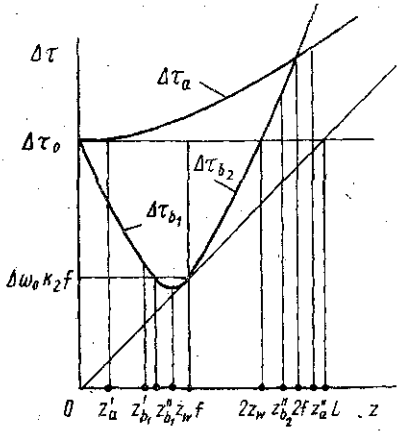

Рис. 1

где $\Delta\tau_a = \Delta\tau_a(z_a)$ и т. д.

2. Законы подобия (5) и (7) позволяют в ряде случаев значительно упростить расчеты, связанные с распространением результатов, полученных для случая (a), на случай (b) и наоборот. Проиллюстрируем это на двух примерах.

Согласно (6) дальняя зона в случае (a) подобна фокусу в случае (b), $z_a \to \infty$, $z_{b1} \to f$. Поэтому, принимая во внимание, что согласно [2, 5]

$$I_a(\theta, z) = \frac{1}{k_2 z} g_0(\omega = \theta/k_2 z),$$

$$\Delta\tau_a(z) = \Delta\omega_0 k_2 z \quad (z = z_a \to \infty), \tag{8}$$

из (5) и (7) сразу находим для точки фокуса:

$$I_{b1}(\theta,\ f)=\frac{1}{k_2 f}g_0(\omega=\theta/k_2 f),\ \Delta\tau_{b1}(f)=\Delta\omega_0 k_2 f\quad (z=z_{b1}=f) \tag{9}$$

в соответствии с результатами, полученными ранее в [2, 6]. Заметим, что при выводе (8) и (9) предполагается, что при оценке $\Delta\tau$ и $\Delta\omega_0$ использованы произвольные, но однотипные критерии [2].

В качестве второго примера рассмотрим моменты $\langle\tau^n\rangle$, которые согласно [7] являются полиномами n-й степени по z. Пусть в случае (a)

$$\langle\tau\rangle_a=\beta_{10}+\beta_{11}z,\ \langle\tau^2\rangle_a=\beta_{20}+\beta_{21}z+\beta_{22}z^2, \tag{10}$$

где $\beta_{10}=\langle\tau\rangle_0$, $\beta_{20}=\langle\tau^2\rangle_0$, $z\equiv z_a$. Используя (7), сразу находим

$$\langle\tau\rangle_{b1}=\beta_{10}(1-z/f)+\beta_{11}z,\ \langle\tau^2\rangle_{b1}=\beta_{20}(1-z/f)^2+\beta_{21}z(1-z/f)^2+\beta_{22}z^2, \tag{11}$$

$z\equiv z_{b1}$. Заметим, что, вычисляя $\langle\tau^n\rangle$, иногда удобно использовать частотное представление [3]; например,

$$\begin{aligned}\langle\tau\rangle_0&=U_0^{-1}\int|a_0(t)|^2 t\,dt=2\pi i U_0^{-1}\int a_{0,\omega}a^*_{0,\omega}d\omega\ \ (a'=\partial a/\partial\omega),\\ \langle\tau^2\rangle_0&=U_0^{-1}\int|a_0(t)|^2 t^2 dt=2\pi U_0^{-1}\int|a'_{0,\omega}|^2 d\omega.\end{aligned} \tag{12}$$

Аналогично, моменты $\langle\omega^n\rangle_0=U_0^{-1}\int g_0(\omega)\omega^n d\omega$ можно вычислять, используя временно́е представление:

$$\begin{aligned}\langle\omega\rangle_0&=2\pi U_0^{-1}\int|a_{0,\omega}|^2\omega d\omega=-iU_0^{-1}\int\dot a_0(t)\,a_0^*(t)\,dt\quad(\dot a=\partial a/\partial t),\\ \langle\omega^2\rangle_0&=2\pi U_0^{-1}\int|a_{0,\omega}|^2\omega^2 d\omega=U_0^{-1}\int|\dot a_0(t)|^2 dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Заметим, что в (10)

$$\beta_{11}=k_2\langle\omega\rangle_0,\ \beta_{22}=k_2^2\langle\omega^2\rangle_0;\ \beta_{21}=ik_2U_0^{-1}\int\omega\,(a'_{0,\omega}a^*_{0,\omega}-\text{к. с.})\,d\omega. \tag{14}$$

3. Для некоторых импульсов $a_0(t)$ закон подобия выполняется не только при $z_b=z_{b1}\leqslant f$ (см. 5)), но и в области $z_b=z_{b2}\geqslant f$. Например, если

$$a_0^*(t)=a_0(t),\ a^*_{0,\omega}=a_{0,-\omega} \tag{15}$$

(амплитудно-модулированный импульс), то, используя опять (3) и (4), получим

$$\frac{\mathcal{K}_{b2}}{\mathcal{K}_a}=\frac{I_{b2}}{I_a}=-\frac{\theta_a}{\theta_{b2}}=\frac{\tau_a}{\tau_{b2}}=\frac{z_a}{z_{b2}}=\frac{1}{z_{b2}/f-1}=z_a/f-1 \tag{16}$$

($z_a\geqslant f$, $z_{b2}\geqslant f$). Если же

$$a_0^*(t)=a_0(-t),\ a^*_{0,\omega}=a_{0,\omega} \tag{17}$$

(импульс с четной амплитудной и нечетной фазовой модуляцией), то

$$\frac{\mathcal{K}_{b2}}{\mathcal{K}_a}=\frac{I_{b2}}{I_a}=\frac{\theta_a}{\theta_{b2}}=-\frac{\tau_a}{\tau_{b2}}=\frac{z_a}{z_{b2}}. \tag{18}$$

Таким образом, в случае импульсов (15) или (17) к двум точкам подобия z_a, z_{b1} при $z_a\geqslant f$, $z_{b1}\geqslant f/2$ добавляется третья, z_{b2} (см. рис. 1),

в которой импульс имеет ту же (см. (18)) или обращенную во времени (см. (16)) форму, что и в точках z_a и z_{b1}. При этом

$$\frac{\Delta\tau_{b2}}{\Delta\tau_a}=\frac{\tau_{\text{cor},\,b2}}{\tau_{\text{cor},\,a}}=\left[\frac{\langle\tau^n\rangle_{b2}}{\langle\tau^n\rangle_a}\right]^{1/n}=\frac{z_{b2}}{z_a}. \tag{19}$$

Из соотношений (7) и (19) находим:

$$\begin{aligned}
&\Delta\tau_a=\frac{\Delta\tau_{b1}}{1-z_{b1}/f}=\frac{\Delta\tau_{b2}}{z_{b2}/f-1},\quad z_a=\frac{z_{b1}}{1-z_{b1}/f}=\frac{z_{b2}}{z_{b2}/f-1},\\
&\Delta\tau_{b1}=\frac{\Delta\tau_a}{1+z_a/f}=\frac{\Delta\tau_{b2}}{2z_{b2}/f-1},\quad z_{b1}=\frac{z_a}{1+z_a/f}=\frac{z_{b2}}{2z_{b2}/f-1},\\
&\Delta\tau_{b2}=\frac{\Delta\tau_a}{z_a/f-1}=\frac{\Delta\tau_{b1}}{2z_{b1}/f-1},\quad z_{b2}=\frac{z_a}{z_a/f-1}=\frac{z_{b1}}{2z_{b1}/f-1}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Если из теории или эксперимента известны значения одной из величин $\Delta\tau_a$, $\Delta\tau_{b1}$, $\Delta\tau_{b2}$, то путем элементарного пересчета по формулам (20) легко определить две другие. Отметим точку пересечения кривых $\Delta\tau_a$ и $\Delta\tau_{b2}$ (см. рис. 1):

$$\Delta\tau_a=\Delta\tau_{b2}=3\Delta\tau_{b1},\quad z_a=z_{b2}=2f,\quad z_{b1}=(2/3)f,$$

и точку фокуса, где в согласии с (9)

$$\Delta\tau_{b1}=\Delta\tau_{b2}=\Delta\omega_0 k_2 f,\quad z_{b1}=z_{b2}=f.$$

4. Для импульсов специального вида (15) и (17) выражения (10) упрощаются, и задача определения зависимости $\Delta\tau$ от z решается до конца в общем виде. В случае (15) из неравенства $a^*_{0,\omega}=a_{0,\,-\omega}$ следует, что $g_0(\omega)=g_0(-\omega)$ и $a_{0,\omega}=\alpha_\omega+i\beta_\omega$, где $\alpha_\omega=\alpha_{-\omega}$, $\beta_{-\omega}=-\beta_\omega$. При этом величина $a'_{0,\omega}a^*_{0,\omega}$—к. с.$=2i(\beta'_\omega\alpha_\omega-\alpha'_\omega\beta_\omega)$ будет четной функцией ω. Таким образом, согласно (14) в этом случае $\beta_{11}=\langle\omega\rangle_0=0$, $\beta_{21}=0$,

$$\langle\tau\rangle_a=\langle\tau\rangle_0=\text{const},\quad \langle\tau^2\rangle_a=\langle\tau^2\rangle_0+k_2^2\langle\omega^2\rangle_0 z^2. \tag{21}$$

Соответствующий (17) импульс интенсивности симметричен, и $a'_{0,\omega}a^*_{0,\omega}$—к. с.$=0$ ввиду действительности $a_{0,\omega}$, т. е. здесь $\beta_{10}=\beta_{21}=0$,

$$\langle\tau\rangle_a=k_2\langle\omega\rangle_0 z,\quad \langle\tau^2\rangle_a=\langle\tau^2\rangle_0+k_2^2\langle\omega^2\rangle_0 z^2. \tag{22}$$

Как следует из (21) и (22), среднеквадратичная (с. к.) длительность импульса $\Delta\tau_{\text{rms}}=[\langle\tau^2\rangle-\langle\tau\rangle^2]^{1/2}$ в обоих случаях (15) и (17) определяется выражением

$$\Delta\tau_{\text{rms},\,a}=\sqrt{\Delta\tau^2_{\text{rms},0}+k_2^2\Delta\omega^2_{\text{rms},0}z^2}=\Delta\tau_{\text{rms},0}\sqrt{1+(z/L)^2}, \tag{23}$$

где $\Delta\omega_{\text{rms},0}=[\langle\omega^2\rangle_0-\langle\omega\rangle_0^2]^{1/2}$—с. к. ширина спектра $g_0(\omega)$ входного импульса, $L=\Delta\tau_{\text{rms},0}/k_2\Delta\omega_{\text{rms},0}$—обобщенная дисперсионная длина. В последующих формулах индекс «rms» опускается: везде $\Delta\tau=\Delta\tau_{\text{rms}}$, $\Delta\omega=\Delta\omega_{\text{rms}}$. Искомое общее выражение для $\Delta\tau_b$ получим, используя преобразования подобия (7) и (19):

$$\Delta\tau_{b1}(z_{b1})=\Delta\tau_a\left(z_a=\frac{z_{b1}}{1-z_{b1}/f}\right)(1-z_{b1}/f),$$

$$\Delta\tau_{b2}(z_{b2})=\Delta\tau_a\left(z_a=\frac{z_{b2}}{z_{b2}/f-1}\right)(z_{b2}/f-1).$$

Подставив сюда выражение (23), получим формулу, объединяющую оба случая ($z_{b1} \leqslant f$, $z_{b2} \geqslant f$), применимую при всех z и f и любых входных импульсах типа (15) и (17):

$$y(z)=\frac{\Delta\tau_b}{\Delta\tau_0}=\sqrt{\left(1-\frac{z}{f}\right)^2+\left(\frac{z}{L}\right)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{\zeta}{\varepsilon}\right)^2+\zeta^2}=$$

$$=\sqrt{y_w^2+\left(\frac{\zeta-\zeta_w}{y_w}\right)^2}, \tag{24}$$

где $\zeta=z/L$, $\varepsilon=f/L$, $y_w=\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{-1/2}$, $\zeta_w=\varepsilon(1+\varepsilon^2)^{-1}$. Согласно (24)

$$y_{\min}=y(z_w)=y_w, \quad y(z=f)=\varepsilon,$$

т. е. для получения сильной компрессии параметр ε должен быть мал, $\varepsilon \ll 1$. Как уже отмечалось, кривые (23) и (24) пересекаются при $z=2f$.

5. Формула (24) содержит четыре независимых параметра: k_2, f, $\Delta\tau_0$ и $\Delta\omega_0$; два последних характеризуют входной импульс $a_0(t)$. Найдем их, например, для когерентного супергауссовского импульса, когда

$$a_0(t)=F(t), \; F(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}(t/t_0)^{2m}\right\}, \; m=1, \; 2, \ldots \tag{25}$$

В случае (25) удовлетворяются оба условия (15), (17), так что формула (24) здесь применима. Используя временное представление (13) при определении $\Delta\omega_0$, получим

$$\Delta\tau_0=\Delta\tau_F=t_0\left[\Gamma(3/2m)/\Gamma(1/2m)\right]^{1/2},$$

$$\Delta\omega_0=\Delta\omega_F=\frac{m}{t_0}\left[\Gamma(2-1/2m)/\Gamma(1/2m)\right]^{1/2}, \tag{26}$$

т. е. в (24)

$$L=L_F=\frac{t_0^2}{k_2 m}\left[\frac{\Gamma(3/2m)}{\Gamma(2-1/2m)}\right]^{1/2}, \quad \varepsilon=\varepsilon_F=\frac{fk_2 m}{t_0^2}\left[\frac{\Gamma(2-1/2m)}{\Gamma(3/2m)}\right]^{1/2}. \tag{27}$$

6. В случае некогерентного (случайно модулированного) импульса $a_0(t)$ законы подобия (5), (16) и (18) по-прежнему остаются справедливыми, причем они будут выполняться как для отдельных реализаций, так и для статистических средних $\mathscr{K}(\theta, \tau, z)$ и $I(\theta, z)$. Рассмотрим подробнее мультипликативную модель некогерентного входного импульса:

$$a_0(t)=F(t)\xi(t) \tag{28}$$

[2, 8]. Здесь $F(t)=\int F_\omega \exp\{i\omega t\}\,d\omega$ — регулярная комплексная функция,

$$I_F(t)=|F(t)|^2, \; g_F(\omega)=2\pi|F_\omega|^2, \; u_F=\int g_F d\omega=\int I_F dt,$$

$$\langle\tau^n\rangle_F=U_F^{-1}\int I_F t^n dt,$$

а $\xi(t)=\int \xi_\omega \exp\{i\omega t\}\,d\omega$ описывает комплексный случайный стационарный процесс,

$$\langle\xi\rangle=0, \; \langle\xi\xi^*\rangle=\sigma^2, \; \langle\xi\xi_\tau^*\rangle=B(\tau)=\sigma^2 R(\tau)=\int G(\omega)\exp\{i\omega\tau\}\,d\omega.$$

Можно показать, что в рассматриваемом случае из-за комплексности ξ корреляционная функция $B(\tau)$ и спектр $G(\omega)$ имеют, вообще говоря, не только четные, но и нечетные компоненты, отмечаемые в дальнейшем соответственно индексами 1 и 2:

$$B(\tau)=B_1(\tau)+iB_2(\tau)=B^*(-\tau),\ G(\omega)=G_1(\omega)+G_2(\omega)\geqslant 0,$$

где $B_1(-\tau)=B_1(\tau)$, $B_2(-\tau)=-B_2(\tau)$ и т. д. В случае (28) $a_{0,\omega}=\int F_{\omega-\omega_1}\xi_{\omega_1}d\omega_1$, и проведя усреднение по ансамблю ξ, получим

$$\overline{U}_0=\sigma^2U_F,\ \overline{g}_0(\omega)=2\pi\,\overline{|a_{0,\omega}|^2}=\int g_F(\omega-\omega_1)\,G_{\omega_1}d\omega_1. \tag{29}$$

Используя (29), можно показать, что моменты

$$\langle\omega^n\rangle_0=\overline{U}_0^{-1}\int\overline{g}_0(\omega)\,\omega^n d\omega,\ \langle\omega^n\rangle_F=U_F^{-1}\int g_F(\omega)\,\omega^n d\omega,$$

$$\langle\omega^n\rangle_\xi=\sigma^{-2}\int G(\omega)\,\omega^n d\omega$$

связаны соотношениями

$$\langle\omega\rangle_0=\langle\omega\rangle_F+\langle\omega\rangle_\xi,\ \langle\omega^2\rangle_0=\langle\omega^2\rangle_F+2\langle\omega\rangle_F\langle\omega\rangle_\xi+\langle\omega^2\rangle_\xi \tag{30}$$

и т. д. Отсюда для с. к. ширин спектров находим

$$\Delta\omega_0^2=\Delta\omega_F^2+\Delta\omega_\xi^2,$$

или

$$\Delta\omega_0=\Delta\omega_F\sqrt{1+\gamma^2},\ \gamma=\Delta\omega_\xi/\Delta\omega_F. \tag{31}$$

Параметр γ можно назвать коэффициентом некогерентности импульса (28). При сужении частотного спектра $G(\omega)$ шумовой модуляции в (28) $\Delta\omega_\xi\to 0$, $\gamma\to 0$ и импульс (28) становится чисто когерентным.

Заметим, что в (30)

$$\langle\omega\rangle_\xi=-i\dot{R}(0)=\dot{R}_2(0),\ \langle\omega^2\rangle_\xi=-\ddot{R}(0)=-\ddot{R}_1(0),$$

так что

$$\Delta\omega_\xi^2=-\ddot{R}(0)-\dot{R}^2(0). \tag{32}$$

Если коэффициент корреляции имеет вид

$$R(\tau)=\exp\{-\varphi_1(\tau)-i\varphi_2(\tau)\}=R^*(-\tau),$$

то

$$\langle\omega\rangle_\xi=-\dot{\varphi}_2(0),\ \langle\omega^2\rangle_\xi=\ddot{\varphi}_1(0)+\dot{\varphi}_2^2(0),\ \Delta\omega_\xi^2=\ddot{\varphi}_1(0).$$

Интересно, что в случае (28) законы подобия (16) и (18) для $\overline{\mathcal{H}}$ и I будут выполняться в области $z_b\geqslant f$ при условиях

$$F^*(t)=F(t),\ B(\tau)=B_1(\tau)=B(-\tau), \tag{33}$$

$$F^*(t)=F(-t),\ B(\tau)=B_1(\tau)+iB_2(\tau)=B^*(-\tau), \tag{34}$$

менее жестких, чем соответственно (15) и (17). Таким образом, если при вычислении $\langle\tau^n\rangle$ и $\langle\omega^n\rangle_0$ использовать статистические средние

$I(\theta, z)$ и $\bar{g}_0(\omega)$, то полученная выше формула (24) будет охватывать и случаи (33), (34).

К классу (34) относится супергауссовский некогерентный импульс

$$a_0(t)=F(t)\xi(t),\ F(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}(t/t_0)^{2m}\right\},\ B(\tau)=B^*(-\tau), \tag{35}$$

и согласно (31) в этом случае в (24) следует положить

$$L=\frac{L_F}{\sqrt{1+\gamma^2}},\ \varepsilon=\varepsilon_F\sqrt{1+\gamma^2},\ \Delta\tau_0=\Delta\tau_F,$$

где L_F, ε_F и $\Delta\tau_F$ определяются формулами (26), (27), коэффициент некогерентности равен

$$\gamma=\frac{t_0}{m}\left[-\frac{\ddot{R}(0)+\dot{R}^2(0)}{\Gamma(2-1/2m)/\Gamma(1/2m)}\right]^{1/2}$$

(см. (31) и (32)). Приведенные выражения обобщают результаты, полученные в работе [9] (см. также [8]) для когерентного гауссовского импульса, на условия $f\neq\infty$ и $\gamma\neq0$ (но без учета регулярной частотной модуляции — мы считали, что в (25) $\operatorname{Im} t_0=0$).

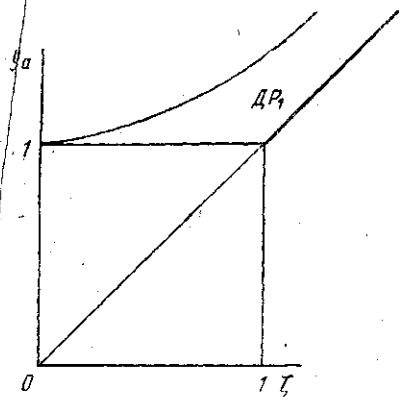

Рис. 2

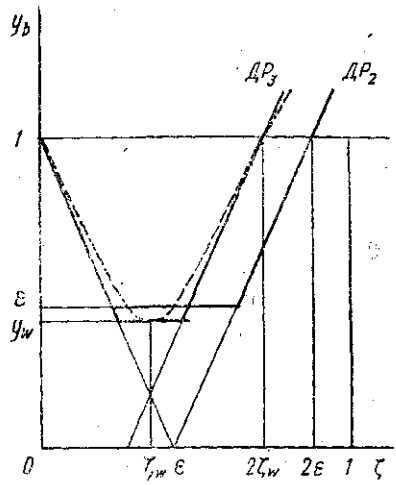

Рис. 3

7. Для качественных оценок может оказаться полезной диаграмма распространения (ДР) — линейно-ломаная аппроксимация функции (24) [3]. Случаю (a) соответствует $ДР_1$, представленная на рис. 2. В случае (b) можно использовать две диаграммы — $ДР_2$ и ее уточненный вариант $ДР_3$ (рис. 3). При сильной компрессии ($\varepsilon\ll1$) $ДР_3$ мало отличается от $ДР_2$, поскольку $\varepsilon-\zeta_w\sim\varepsilon^3$ и $\varepsilon-y_w\sim\varepsilon^3/2$. Заметим, что параметры y_w и ζ_w просто находятся графически (рис. 4), так что при заданной величине ε построение всех ДР не требует никаких дополнительных вычислений.

8. Подобие имеет место и для импульсов, распространяющихся в нелинейной среде, например, если A удовлетворяет нелинейному уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial z}-i\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial\theta^2}=\alpha\,|A^4|\,A,\qquad \alpha=\text{const}. \tag{36}$$

Это можно показать, используя одномерный вариант

$$A_a = A_b \sqrt{\frac{z_b}{z_a}} \exp\left\{ i \frac{\theta_b^2}{2k_2 f} \frac{z_a}{z_b} \right\}, \quad \frac{z_a}{z_b} = \frac{\theta_a}{\theta_b} = 1 + \frac{z_a}{f}, \tag{37}$$

приведенного в [10] преобразования переменных, при котором уравнение (36) остается инвариантным. Аналогично можно убедиться в подобии импульсов A_a и A_b, удовлетворяющих разным уравнениям:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i \frac{k_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = \begin{cases} \alpha |A^n| A, & A = A_a; \\ \alpha |A^n| A \varphi(z), & A = A_b, \end{cases} \tag{38}$$

если

$$\varphi(z) = (1 - z/f)^{2-n/2}, \quad 0 < z < f.$$

При $n=4$ оба уравнения (38) совпадают с (36).

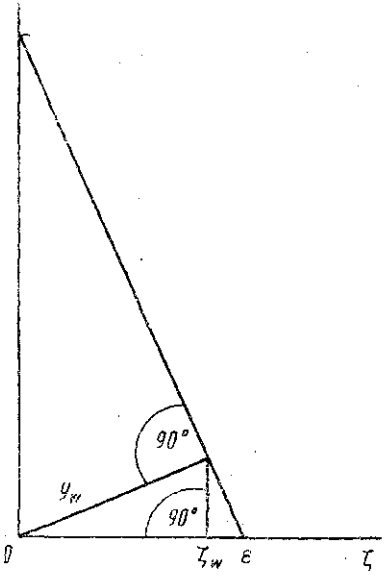

Рис. 4

9. Для параксиальных волновых пучков тоже выполняются законы подобия, близкие к рассмотренным, причем не только в линейной, но и в кубической нелинейной среде [10]. Полученные выше результаты для импульсов почти полностью переносятся на коллимированные, сфокусированные и дефокусированные когерентные и некогерентные пучки, распространяющиеся в линейной среде [3].

Отметим одно следствие из законов подобия для пучков, которое может представить особый практический интерес. Если произвольный первичный пучок проходит через линзы с фокусными расстояниями f_1 и f_2, то получающиеся сфокусированные пучки *1* и *2* будут, согласно законам подобия, иметь одинаковую (в масштабе $\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2 = z_1/z_2$, $\mathbf{r}$ — поперечный радиус-вектор) поперечную структуру в корреспондирующих сечениях z_1 и z_2, связь между которыми определяется соотношением

$$1/z_1 = 1/z_2 + 1/f, \quad 0 < z_1 < f_1,$$
$$1/f = 1/f_1 - 1/f_2, \quad 0 < z_2 < f_2;$$

фазы пучков различаются при этом лишь на известную величину ψ. Действительно, используя общее решение параболического уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \Delta_\perp A = 0, \quad A = A(x, y, z) = A(\mathbf{r}, z),$$

для комплексной амплитуды пучка $E = \exp\{i(\omega_0 t - k_0 z)\} A + \text{к. с.}$ и описывая линзу функцией $\exp\{ik_0 \mathbf{r}^2/2f\}$ (см., напр., [1], с. 302, 303), получим

$$A_1(\mathbf{r}_1, z_1) = \frac{z_1}{z_2} \exp\{i\psi\} A_2(\mathbf{r}_2, z_2),$$

$$\psi = \frac{k_0}{2}\left(\frac{r_2^2}{z_2} - \frac{r_1^2}{z_1}\right) = \frac{k_0 r_2^2}{2f} \frac{1}{1 + z_2/f}.$$

Таким образом, если нужно знать детальную структуру поля вблизи фокуса f_1, но прямые измерения затруднительны из-за очень малых размеров фокальной области, то можно провести эти измерения на другом пучке, полученном из того же первичного пучка, но с $f_2 \gg f_1$ и большей фокальной областью; затем по формулам подобия эти результаты без труда пересчитываются на интересующий нас пучок f_1. Так можно поступать при измерении самых различных параметров пучка: амплитуды, фазы, интенсивности, радиуса, радиуса пространственной корреляции и т. д. Форма и степень пространственной когерентности первичного пучка при этом не имеют значения.

С другой стороны, если использовать подобие первичного пучка и вспомогательного пучка *2*, то по тем же измерениям, выполненным вблизи f_2, можно, например, аккуратно оценить углы расходимости θ_x, θ_y первичного пучка.

Суммируем полученные результаты. Установлены законы подобия для импульсов, бегущих в среде с квадратичной дисперсией и рассмотрено применение этих законов для решения различных задач. Показано, что в области $0 < z < f$ эти законы выполняются для источников любого типа и имеют вид (5); для широкого класса источников типа (15) или (17) соотношения подобия выполняются также при $z > f$ и имеют вид соответственно (16) или (18). В последнем случае из подобия вытекает простая, но универсальная формула (24) для среднеквадратичной длительности импульса с учетом его компрессии. Результаты обобщены на случай, когда источник является некогерентным (мультипликативная модель).

Предлагается приближенное графическое представление зависимости длительности регулярного или случайно модулированного импульса от расстояния в виде диаграмм распространения. Аналогичные диаграммы распространения могут быть построены для волновых пучков, испытывающих дифракционное расплывание и фокусировку.

Кратко рассмотрено подобие импульсов в нелинейных средах. Обсуждается возможность применения подобия волновых пучков при измерении их параметров.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981. [2] Дьяков Ю. Е., Никитин С. Ю. Задачи по статистической радиофизике и оптике. М., 1985. [3] Дьяков Ю. Е.//Лазеры в народном хозяйстве (Материалы семинара. Общество «Знание» РСФСР). М., 1990. С. 130. [4] Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М., 1988. [5] Дьяков Ю. Е.//Письма в ЖЭТФ. 1983. 37, № 1. С. 14. [6] Jannson T.//Opt. Lett. 1983. 8. P. 232. [7] Anderson D., Lisak M.//Phys. Rev. 1987. A35. P. 184. [8] Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М., 1988. [9] Anderson D., Lisak M.//Opt. Lett. 1987. 11. P. 569. [10] Таланов В. И.//Письма в ЖЭТФ. 1970. 11, № 6. С. 303.

Поступила в редакцию
28.09.90