

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.466

О НЕЛИНЕЙНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДЛИННЫХ ВОЛН
НА МЕЛКОЙ ВОДЕ*

С. А. Арсеньев, А. Ю. Губарь, Н. К. Шелковников

(кафедра физики моря и вод суши)

Рассматривается задача о нелинейной генерации гармоник вследствие нелинейности в длинной волне, распространяющейся по мелкой воде. Уравнения Буссинеска, учитывающие трение о дно, решаются асимптотическим методом усреднения. Получена система укороченных уравнений для амплитуд нелинейно взаимодействующих гармоник в длинной волне, в зависимости от расстояния до берега. Эта система решена методом Рунге—Кутты и результаты сопоставлены с данными специального лабораторного эксперимента. Соответствие вычисленных и наблюдаемых амплитуд гармоник и основной волны оказывается хорошим. Делается вывод о важной роли трения о дно в нелинейной динамике длинных волн.

В последние 30 лет нелинейные взаимодействия между волнами в жидких системах с дисперсией исследовались многократно [2]. Впервые они были обнаружены в случае взаимодействия поверхностных гравитационных волн на глубокой воде [3—6], затем исследовались для капиллярных волн [7], внутренних гравитационных волн [8—11] а также волн Блиновой—Россби [12]. В настоящее время сюда добавились и поверхностные гравитационные длинные волны на мелкой воде. Нелинейные взаимодействия в них приводят к резонансной генерации высших гармоник, волнам комбинационных частот и трансформации формы волны по мере распространения, обрушению волны или формированию приливного бора (аналога ударной волны), обмену энергией между различными типами длинных волн (приливами, штормовыми нагонами и цунами), а также к возникновению новых волн таких, например, как «прибойные биения» в зоне обрушения волны зыби на мелководье [13—19].

Процессы нелинейной трансформации длинной волны на мелкой воде хорошо видны на данных натуральных наблюдений. Например, на рис. 1 показан спектр колебаний уровня воды у побережья Южной Балтики [18], а на рис. 2 — спектр колебаний уровня воды в Каспийском море в 1984—85 гг. у острова Кулалы, вычисленный авторами настоящей статьи по данным имеющейся там гидрометеорологической станции. На обоих спектрах отчетливо видны вторая и третья гармоники. В первом случае (рис. 1) они возникли при распространении длинных волн зыби в прибрежной мелководной зоне, а во втором (рис. 2) — при распространении длинных волн штормового стога и нагона, имеющих синоптический период около 6 сут, по мелководью северного Каспия (глубины здесь имеют порядок 5 м).

Наряду с измерениями в морях и океанах в последнее время для детального изучения процессов нелинейной трансформации длинных волн начали создаваться лабораторные установки. Одна из них построена на физическом факультете МГУ и представляет собой прямоугольный канал длиной 3 м, заполненный водой. На одном конце

* Работа докладывалась на международном симпозиуме «Анизотропия потоков жидкости в поле внешних сил». Латвия, Юрмала, 10—13 сент. 1990 г. [1].

канала установлен волнопродуктор стержневого типа, генерирующий почти гармонические колебания уровня поверхности воды, распространяющиеся в виде прогрессивной длинной волны вдоль канала. На другом конце канала установлен поглотитель падающей волны: пологий откос с поплавковыми и сеточными волногасителями. Возмущения поверхности уровня на различных расстояниях x от волнопродуктора регистрируются струнными или оптическими волнографами. Аналогичные лабораторные установки созданы в Гренобльском университете (Франция) [20] и Пенсильванском университете (США) [18].

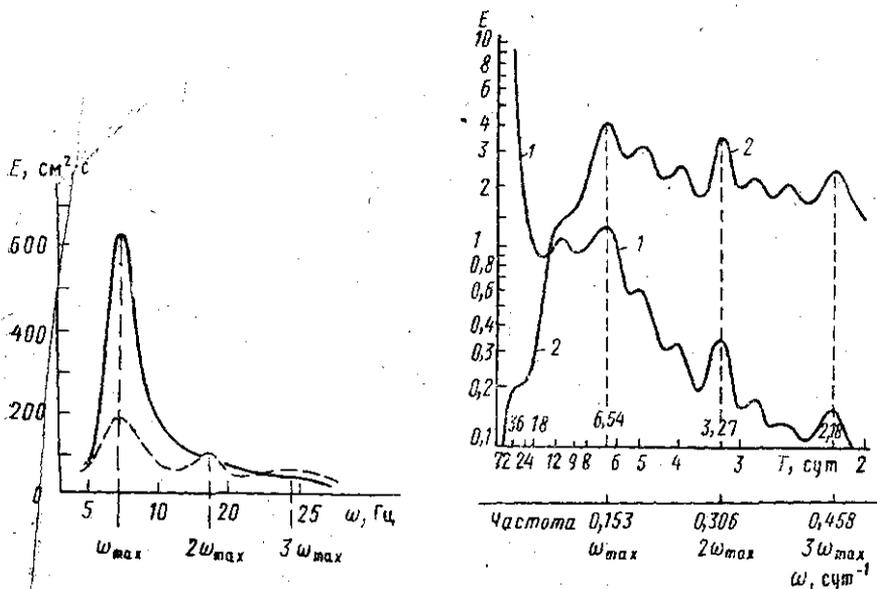


Рис. 1. Спектр колебаний уровня моря у побережья Южной Балтики [18] на глубине 6 (сплошная линия) и 2 м (пунктир)

Рис. 2. Безразмерный спектр колебаний уровня Каспийского моря у о. Кулалы в 1984—1985 гг.: линия 1 — нефильТРованные исходные данные, линия 2 — с фильтром низких частот

При глубине невозмущенного потока H , равной 3 см, колебаниях уровня у волнопродуктора η_0 с амплитудой около 1,5 мм и периодом T_0 , равным 1,5 с, процесс распространения длинной волны в лабораторном канале МГУ идет с генерацией и исчезновениями искажений, обусловленных высшими гармониками: второй и третьей. При этом нелинейные взаимодействия между гармониками и основной волной имеют вид пространственных биений амплитуд основной волны и гармоник. Подобные биения, отлично известные в нелинейной оптике, где они получили название мейкеровских [21], предсказываются и нелинейной теорией мелкой воды [14, 18]. Однако в работах [14, 18] были исследованы только основная волна и вторая гармоника, в то время как лабораторные эксперименты и наблюдения в природе показывают наличие также и третьей гармоники в длинной волне. Настоящая статья является обобщением и развитием работ [14, 18]. Основная наша цель здесь — объяснить наблюдаемые эффекты.

Представим прогрессивную волну в канале в виде суммы трех гармоник:

$$\bar{\eta}/\eta_0 = A_1(\bar{x}) \cos[\varphi + \Psi_1(\bar{x})] + A_2(\bar{x}) \cos[2\varphi + \Psi_2(\bar{x})] + A_3(\bar{x}) \cos[3\varphi + \Psi_3(\bar{x})], \quad (1)$$

где $\bar{\eta}$ — возвышение свободной поверхности, $\varphi = \bar{\omega}t - \bar{k}\bar{x}$, $\bar{\omega} = 2\pi/T_0$, $\bar{k} = \bar{\omega}/\sqrt{gH}$. Представление (1) сопоставлялось с записями волн в канале самописцем методом наименьших квадратов, в результате чего находились амплитуды A_1 , A_2 и A_3 в зависимости от расстояния x вдоль канала. На рис. 3 представлены результаты. Как видим, име-

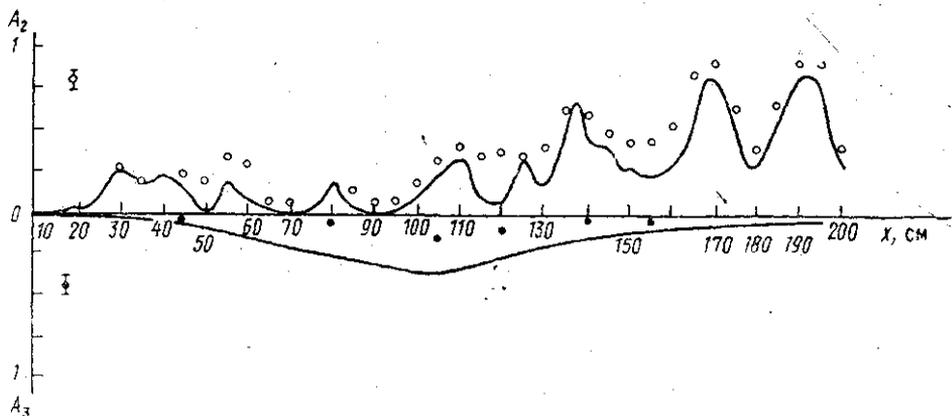


Рис. 3. Наблюдаемые в лабораторном эксперименте амплитуды второй (светлые значки) и третьей (черные) гармоник. Сплошные линии — результаты численных расчетов

ются периодические пространственные пульсации амплитуд второй и третьей гармоник.

Для теоретического описания наблюдений рассмотрим уравнения Буссинеска с трением [22]:

$$\begin{cases} \eta_t + [(1 + \alpha\eta)u]_x - \frac{1}{6}\beta u_{xxx} = 0, \\ u_t + \alpha uu_x + \eta_x - \frac{1}{2}\beta u_{xt} + \gamma u = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$\eta = \bar{\eta}/\eta_0, \quad u = \bar{u}/u_0, \quad u_0 = g\eta_0/\bar{\omega}, \quad x = \bar{k}\bar{x},$$

$$\alpha = \eta_0/H, \quad \beta = (H\bar{k})^2, \quad t = \bar{t}\bar{\omega}, \quad \gamma = \omega_* T_0/(2\pi)$$

и ω_* — частота трения [23].

Решение уравнений (2) с граничным условием

$$\eta = \cos t \text{ при } x=0 \quad (3)$$

ищем методом медленно меняющихся амплитуд в виде

$$\eta = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 A_n(\xi) \exp \{i S_n(x, t)\} + \text{к. с.},$$

$$A_n(0) = \delta_{n0}, \quad n=1, 3,$$

$$u = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 B_n(\xi) \exp \{i S_n(x, t)\} + \text{к. с.} \quad (4)$$

Здесь $\xi = \alpha x$, $\alpha \ll 1$, $S_n = nt - k_n x$, а k_n удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$n^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta k_n^2 - \frac{i\gamma}{n} \right) - k_n^2 \left(1 + \frac{\beta}{6} k_n^2 \right) = 0, \quad (5)$$

получающемуся в нулевом порядке по α после подстановки (4) в (2). В следующем, первом порядке малости при условии достаточного синхронизма между гармониками, т. е. при малости «расстроек» $\delta_2 = k_2 - 2k_1$ и $\delta_3 = k_3 - k_2 - k_1$ по сравнению с соответствующими волновыми числами ($\delta_2 \ll k_2$, $\delta_3 \ll k_3$), получаются уравнения для амплитуд:

$$\begin{aligned} A_1' &= i [\sigma_1 A_2 A_1^* \exp \{-i \tilde{\delta}_2 \xi\} + \sigma_{23} A_3 A_2^* \exp \{-i \tilde{\delta}_3 \xi\}], \\ A_2' &= i [\sigma_2 A_1^2 \exp \{i \tilde{\delta}_2 \xi\} + \sigma_{31} A_3 A_1^* \exp \{-i \tilde{\delta}_3 \xi\}], \\ A_3' &= i \sigma_{12} A_1 A_2 \exp \{i \tilde{\delta}_3 \xi\}, \quad B_n = \sqrt{2} A_n, \quad A_n(0) = \delta_{0n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= k_2 - k_1, \quad \sigma_2 = k_1, \quad \sigma_{23} = k_3 - k_2, \\ \sigma_{31} &= k_3 - k_1, \quad \sigma_{12} = k_2 + k_1, \quad \tilde{\delta}_j = \delta_j / \alpha, \quad j=2, 3. \end{aligned}$$

При $\gamma = 0$, умножая (6) на комплексно сопряженные величины A_j^* и складывая, получим закон сохранения

$$\sigma_2 |A_1|^2 + \sigma_1 |A_2|^2 + \sigma_3 |A_3|^2 = \text{const}, \quad (7)$$

в котором

$$\sigma_3 = (\sigma_1 \sigma_{32} + \sigma_2 \sigma_{31}) / \sigma_{21}.$$

Уравнения (6) интегрировались численно, методом Рунге—Кутта с пошаговой проверкой закона сохранения (7) при малых γ по критерию невышшения. Шаг интегрирования выбирался равным 0,005—0,1 см, и при задаваемой точности 0,5% метод сходился при небольшом числе итераций. Выбирались следующие значения параметров: $\alpha = 0,16$, $\beta = 0,127$, $\gamma = 0,01$. При этом, считая $O(\beta n^2) = O(\delta/n)^2 \ll 1$, дисперсионные уравнения (5) в первом исчезающем порядке по γ записываем в виде

$$k_n = \left\{ \frac{n^2}{2} + \left[\left(\frac{n^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma n}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \left(1 + \frac{1}{6} \beta n^2 \right). \quad (8)$$

Начальные значения амплитуд A_1 , A_2 , A_3 задавались равными 1; 0,01 и 0,001 соответственно.

Результаты численного интегрирования представлены на рис. 3. Здесь не показана первая гармоника, которая пульсирует с очень небольшой амплитудой. Это следует из закона сохранения энергии (7). Например, при $A_2=0,3$ и $A_3=0,2$ из (7) находим $A_1=0,93$, что весьма близко к единице. В целом получившийся ход кривых $A_2(x)$ и $A_3(x)$ соотносится с наблюдениями. Имеет место совпадение точек максимума амплитуд второй гармоники и насыщения третьей ($x=110$ см) с наблюдаемыми в эксперименте. На численном решении прослеживается также наблюдаемый рост максимумов амплитуды второй гармоники с расстоянием. Имеющееся небольшое расхождение теоретических и экспериментальных кривых можно объяснить, вероятно, тем, что используются так называемые «укороченные» уравнения для амплитуд (6). Для более точного описания, возможно, необходимо использовать высшие порядки разложения по β , т. е. члены с β^2 , β^3 ... в уравнениях Буссинеска (2). Отметим, кроме того, что наблюдаемый в экспериментах и численных расчетах достаточно большой пространственный период биений третьей гармоники невозможно объяснить, если не учитывать дисперсию, вызванную трением. Таким образом, трение играет важную роль в нелинейной динамике длинных волн на мелкой воде.

Действительно, в лабораторных экспериментах (см. рис. 3) и в наблюдениях на шельфах морей (см. рис. 1 и 2) обнаруживаются только две первые гармоники, амплитуды которых пульсируют по мере распространения длинной волны. Это обусловлено тем, что на характер распространения длинной волны на мелководье существенно влияет дисперсия. Она вызывается, во-первых, трением о дно, а во-вторых, небольшими отклонениями от гидростатичности, так что волна не является в точности длинной, и это учитывается поправочными членами, содержащими множитель β , в уравнениях (2): так называемая дисперсия Кортвега—де Фриза [22]. Наличие заметной дисперсии приводит к фазовому рассинхронизму между отдельными составляющими, которые движутся с различными фазовыми скоростями. Из-за этого нелинейные взаимодействия между ними становятся менее эффективными, чем в среде без дисперсии, в которой возникают все гармоники и образуются ударные волны. В нашем же случае дисперсионной среды эффективно взаимодействует лишь небольшое число волн (не более трех).

Таким образом, мы имеем дело со слаболинейной, слабопоглощающей, но существенно диспергирующей средой, аналогичной изучаемой в нелинейной оптике и радиофизике. Волны в таких средах мало отличаются от волн в линейном случае. Поэтому и имеет смысл решение системы (2) искать в виде (1) суперпозиции конечного числа волн. В слабонелинейной среде в отсутствие длительного взаимодействия накоплением энергии на высших частотах 4ω , 5ω и т. д. можно с большой точностью пренебречь. Амплитуды волн высших гармоник не могут достигать значительной величины и не выходят за уровень шума.

В заключение отметим весьма нерегулярное (см. рис. 3) поведение амплитуды второй гармоники, хотя граничное условие (при $x=0$) регулярно. В то же время третья гармоника изменяется с расстоянием строго периодически. Этот эффект объясняется в работе [24] теоретически и в [25] экспериментально, где показано, что в периодическом цуге волн на воде из-за нелинейности накапливаются возмущения, которые изменяются с расстоянием нерегулярно при больших амплитудах $A/H > 0,13$ и числах Урсела $Ur > 1$. В нашем случае условия неустойчивости выполняются для второй гармоники и не имеют места для третьей.

Авторы благодарят И. В. Артамонову за помощь при проведении лабораторных экспериментов и расчетов на ЭВМ ЕС 10-66.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Arsenjev S. A., Gubar A. Y., Shelkovnikov N. K. // Anisotropy of fluid flows in external forces fields. Jurmala, Latvian SSR, 1990. P. 7. [2] Филиппс О. М. // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М., 1984. С. 297. [3] Phillips O. M. // J. Fluid Mech. 1960. 9. P. 193. [4] Venuey D. J. // J. Fluid Mech. 1962. 14. P. 577. [5] Захаров В. Е. // Журн. прикл. мех. и техн. физики. 1968. № 2. С. 86. [6] Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М., 1987. [7] McGoldrick L. // J. Fluid Mech. 1965. 21. P. 305. [8] Ball F. K. // J. Fluid Mech. 1964. 19. P. 465. [9] Нестеров С. В. // Изв. АН СССР, ФАО. 1970. 6, № 7. С. 774. [10] Бреховских Л. М., Гончаров В. В., Куртепов В. М., Наугольных К. А. // Там же. 1972. 8, № 2. С. 192. [11] Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л., 1981. [12] Лонге-Хиггинс М. С., Гилл А. Э. // Нелинейная теория распространения волн. М., 1970. С. 161. [13] Арсеньев С. А., Губарь А. Ю., Шелковников Н. К. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1990. 31, № 3. С. 63. [14] Арсеньев С. А., Рыкунов Л. Н., Шелковников Н. К. // ДАН СССР. 1990. 314, № 4. С. 821. [15] Арсеньев С. А. // Водные ресурсы. 1991. № 1. С. 141. [16] Arseniev S. A. // Ocean Modelling. 1990. N 88. P. 10. [17] Арсеньев С. А., Шелковников Н. К. // Тез. докл. III Всесоюз. конф. «Вихри и турбулентность в океане». Калининград, 1990. С. 53. [18] Восзаг-Каракиевич В., Вона Л. L., Cohen D. L. // Dynamical Problems in Continuum Physics. N. Y.: Springer-Verlag, 1987. P. 130. [19] Craik A. D. D. Wave Interactions and Fluid Flows. Cambridge University Press, 1985. [20] Шаберд'Йер Г., Ле Превоз // Внутренние волны в океане. Новосибирск (Изд. ВЦ СО АН СССР), 1972. С. 194. [21] Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики. М., 1989. [22] Габов С. А. Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988. [23] Арсеньев С. А., Шелковников Н. К. Динамика вод шельфов. М., 1990. [24] Бенджамен Т. Б. // Нелинейная теория распространения волн. М., 1970. С. 83. [25] Фейр Дж. // Там же. С. 77.

Поступила в редакцию
30.03.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 2

УДК 532.65 : 532.529.2

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКОГО ЗНАЧЕНИЯ ЧИСЛА РЭЛЕЯ В УСЛОВИЯХ ТУРБУЛЕНТНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Е. П. Анисимова, И. В. Петренко, А. А. Сперанская

(кафедра физики моря и вод суши)

Представлены результаты экспериментального определения критического значения числа Рэлея, характеризующего возникновение режима турбулентного свободно-конвективного движения. Показано, что для условий развитой свободной конвекции в поверхностном слое охлаждающейся с поверхности воды критическое значение числа Рэлея равно 1105, что хорошо согласуется с величиной, полученной теоретически для пограничного слоя с одной жесткой и одной свободной границами.

Экспериментальные данные, приведенные в работах [1, 2], свидетельствуют о том, что в воде в условиях свободной конвекции область между слоем с молекулярным механизмом переноса тепла и зоной развитого конвективного движения настолько тонка, что обнаружить ее инструментально не всегда удается. Исходя из этого факта, в работе [3] для определения критического значения числа Рэлея, характеризующего возникновение режима развитого свободно-конвективного дви-