

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.145 : 530.12; 537.8 : 530.145

ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Р. Халилов

(кафедра теоретической физики)

Построен термодинамический потенциал нерелятивистского газа электронов (обладающих аномальным магнитным моментом) в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях. Полученные результаты применяются для объяснения свойств нормального квантового эффекта Холла в двумерных системах.

Поведение электронов в квантующем (движение) магнитном поле при низких температурах приводит к удивительным явлениям, наиболее яркими из которых, несомненно, являются эффект де Гааза—ван Альфена и квантовый эффект Холла в двумерном газе электронов. Теоретическое объяснение этих замечательных эффектов основывается на квантовании в магнитном поле состояний свободных электронов, что показал Л. Д. Ландау еще в 1930 г., опираясь на низкотемпературный характер эффекта де Гааза—ван Альфена.

Оба эффекта можно исследовать, зная термодинамические свойства квантового газа фермионов во внешнем поле, которые определяются термодинамическим потенциалом $\Omega(\mu, F, T)$, рассматриваемым как функция химического потенциала μ , напряженностей внешних полей и температуры газа. Здесь мы найдем выражение для термодинамического потенциала нерелятивистского идеального газа электронов, находящегося в скрещенных однородных электрическом и магнитном полях, заданных в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= (0, E, 0), \\ \mathbf{B} &= (0, 0, B), \quad \mathbf{A} = (-yB, 0, 0). \end{aligned} \quad (1)$$

Спектр энергий электрона в конфигурации полей (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{\hbar e B}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m} - c \frac{E}{B} p + \frac{\hbar e B}{2m_0 c} (1 + \delta) \frac{(\zeta B)}{|B|}, \\ \zeta &= \pm 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Последний член в (2) описывает взаимодействие спинового магнитного (включая аномальную часть) момента свободного электрона с магнитным полем; тогда нужно положить $m = m_e$. Если электрон находится в кристаллической решетке, то последний член описывает только взаимодействие спина электрона с магнитным полем, так как в ε_n в этом случае входит эффективная масса электрона m .

Термодинамический потенциал представим в виде

$$\begin{aligned} \Omega(\mu, B, E, T) &= -mc^2 V \Theta \sum_{n, p_z, p, \zeta} \ln \left(1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_n}{\Theta} \right\} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} n_0 mc^2 \Theta V \chi \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{-\frac{eBL_y}{c}}^{\frac{eBL_y}{c}} dp \frac{c}{eBL_y} \sum_{\substack{n=0 \\ \zeta=\pm 1}}^{\infty} \ln \left(1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon_n}{\Theta} \right\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены обозначения: V — объем, $n_0 = (mc/\hbar)^3 (1/3\pi)$ и безразмерные величины $p_z = p_z/(mc)$, $p = p/(mc)$, $\mu = \mu/(mc^2)$, $\Theta = kT/(mc^2)$, $\chi = B/B_0$, $B_0 = m^2 c^3 / (eh)$.

Вычисления проведем методом преобразований Меллина, изложенным в [1]. Для этого над функцией

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{-\frac{eBL_y}{c}}^{\frac{eBL_y}{c}} dp \ln \left(1 + \exp \left\{ \frac{\mu - \varepsilon u}{\Theta} \right\} \right) \quad (4)$$

совершим преобразование Меллина по переменной $a = \exp(\mu/\Theta)$, т. е. найдем меллиновский образ

$$M(F(s)) = \int_0^{\infty} a^{s-1} F(u) du = \frac{\pi}{s \sin \pi s} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{-\frac{eBL_y}{c}}^{\frac{eBL_y}{c}} dp \exp \left\{ -\frac{\varepsilon u}{\Theta} \right\}, \quad (5)$$

$0 < \text{Re } s < 1.$

В полученном выражении проведем суммирование по l и интегрирование по p_z и p . С помощью обратного преобразования Меллина по параметру a , задаваемого контурным интегралом

$$\Omega(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} M(\Omega(s)) a^{-s} ds, \quad \gamma > 0, \quad (6)$$

можно получить асимптотическое разложение (6) по параметру a . Для этого нужно замкнуть контур интегрирования налево, если $\mu-1 > 0$, или направо, если $\mu-1 \leq 0$. Вычисление интеграла фактически сводится к вычислению суммы вычетов в полюсах подынтегральной функции.

Действительно, так как $M(\Omega(s)) \rightarrow 0$ при $|\text{Im } s| \rightarrow \infty$, то для $\Omega(\mu)$ имеем асимптотическое разложение в виде

$$\Omega(\mu) = \mp \frac{3}{4} mc^2 \Theta \kappa n_0 V \Sigma \text{Res} \left\{ \frac{\pi \exp \{s\mu/\Theta\}}{s \sin \pi s} \sqrt{\frac{\pi \cdot 2\Theta}{s} \frac{\text{ch}[s\kappa_e (1+\delta)/2\Theta]}{\text{sh}[s\kappa/2\Theta]}} \frac{\text{sh } \alpha}{\alpha} \right\},$$

$$\alpha = \frac{eEL_y}{2mc^2\Theta}, \quad \kappa_e = \frac{vB}{B_e}, \quad B_e = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}, \quad (7)$$

где верхний знак ставится при замыкании контура налево, т. е. если $\mu-1 > 0$. При этом нужно вычислить сумму вычетов выражения (7) в полюсах, расположенных на действительной отрицательной полуоси $s=l$, $l=0, -1, -2, \dots$, а также в полюсах $s_l = 2\pi i l / \kappa$ (полюсы $\text{sh } \alpha$) на мнимой оси. Если $\mu-1 < 0$, то контур интегрирования замыкается направо и необходимо вычислить сумму вычетов в полюсах $s=l$, $l=1, 2, 3, \dots$. Полюсы, расположенные на действительной оси, дают вклад в «монотонную часть» термодинамического потенциала, в то время как полюсами $s_l = 2\pi i l / \kappa$ определяется осциллирующая часть $\Omega(\mu)$.

Переход к газу свободных электронов, в котором взаимодействие аномального магнитного момента электрона с полем не учитывается, осуществляется следующим образом. Очевидно, нужно положить $\delta=0$ и $\kappa_e=\kappa$, поэтому вместо множителя $\frac{\text{ch}[s\kappa_e (1+\delta)/2\Theta]}{\text{sh}[s\kappa/2\Theta]}$ появится множитель $\text{cth}(s\kappa/2\Theta)$. При $a=0$ полученное таким образом выражение в точности совпадает с нерелятивистским пределом формулы (6.18) в работе [1].

Недиагональную часть электронной проводимости в полях (1), как известно, можно связать с числом электронов N_e , находящихся внутри поверхности Ферми в состоянии термодинамического равновесия:

$$\sigma_{yx} = \frac{ec}{B} N_e. \quad (8)$$

Эта формула справедлива и в случае двумерного электронного газа. Число электронов определяется формулой

$$N_e(\mu) = -mc^2 \frac{\partial \Omega(\mu)}{\partial \mu}, \quad (9)$$

в которую в двумерном случае нужно подставить соответствующий термодинамический потенциал $\Omega^{(2)}(\mu)$. Потенциал $\Omega^{(2)}(\mu)$ можно получить из (7). Для этого нужно сделать замену

$$\frac{3}{2} n_0 \kappa V \rightarrow n^{(2)} = \frac{eB}{2\pi\hbar c} L^2 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \frac{\kappa}{\pi} L^2, \quad (10)$$

где L^2 — «двумерный объем», и, кроме того, так как в двумерном случае интегрирование по p_z не проводится, отсутствует множитель $\sqrt{2\pi\theta/s}$. В результате получим

$$\Omega^{(2)}(\mu) = \mp \frac{1}{2} mc^2 \theta n^{(2)} \Sigma \operatorname{Res} \frac{\pi \exp\{s\mu/\theta\} \operatorname{ch}[s\kappa_e(1+\delta)/2\theta]}{s \sin \pi s} \frac{\operatorname{sh}[s\kappa/2\theta]}{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha}. \quad (11)$$

Выражение для $\Omega^{(2)}(\mu)$ в случае свободного электронного газа в отсутствие электрического поля было получено в работе [2]. Там же было показано, что в этом случае в пределе $\theta \ll \kappa$ число электронов N_e определяется формулой

$$N_e = n^{(2)} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{2f(x)}{\pi} \right) \equiv j n^{(2)}, \quad (12)$$

$j=1, 2, 3, \dots$, где $x=2\pi\mu/\kappa$, а $f(x)=(\pi-x)/2$, если $0 \leq x \leq 2\pi$; $f(x)$ — периодическая функция x . Очевидно, j равно числу заполненных уровней Ландау.

Недиагональная холловская компонента проводимости σ_{yx} в этом случае имеет вид

$$\sigma_{yx} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{2f(x)}{\pi} \right) \equiv \frac{e^2}{2\pi\hbar} j. \quad (13)$$

Мы видим, что, во-первых, σ_{yx} квантуется, и, во-вторых, плато, которое обнаруживает функция $\Phi(x) = x/\pi + 2f(x)/\pi$ как функция x , или $1/\kappa$, является также плато функции σ_{yx} и $\rho_{yx} = \sigma_{yx}^{-1}$.

Вычисляя N_e по формуле (9) с использованием (11), получим

$$\sigma_{yx} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{2f(x)}{\pi} \right) \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \equiv \frac{e^2}{2\pi\hbar} j \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \quad (14)$$

для свободных электронов с $\delta=0$, и

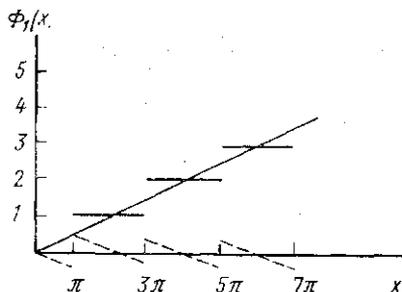
$$\sigma_{yx} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left(\frac{x}{2\pi} + \frac{f_1(x)}{\pi} \right) \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \equiv \frac{e^2}{2\pi\hbar} \Phi_1(x) \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha}, \quad (15)$$

где $f_1(x) = -x/2$, $-\pi < x < \pi$; $f_1(x)$ — периодическая функция x для электронов, обладающих эффективной массой $m \ll m_e$. График $\Phi_1(x)$ изображен на рисунке. Видно, что фактор заполнения уровней Ландау j принимает дискретные значения 0, 1, 2, ...

Из (14), (15) следует, что квантование величины σ_{yx} будет иметь место и в присутствии слабого электрического поля, если $eEL_y/\theta \ll 1$, однако при очень низких температурах существенным параметром является также линейный размер области, заполненной электронами. Относительная ширина плато Δx равна 2π или, в терминах отношения e_F/κ ,

$$\Delta \frac{e_F}{\kappa} = 1,$$

где $e_F = \mu/(mc^2)$ — энергия Ферми, независимо от того, рассматриваются ли свободные электроны или электроны, обладающие эффективной массой $m \ll m_e$.



Таким образом, существование плато и его ширину у функции $\sigma_{yx}(1/\kappa)$ можно объяснить поведением функции N_e , определяющей полное число электронов на площади L^2 в квантующем (движение электронов) магнитном поле при низких температурах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Халилов В. Р. Электроны в сильном магнитном поле. М., 1988. [2] Халилов В. Р. // Изв. вузов, Физика. 1990. № 1. С. 101.

Поступила в редакцию
03.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 2

УДК 535.3

ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ

В. А. Выслоух, Е. А. Коломийцева, А. Н. Матвеев

(кафедра общей физики для физического факультета)

Проведено аналитическое и численное исследование возможностей управления амплитудой, длительностью и частотой двухкомпонентных оптических солитонов, формирующихся в двухмодовых волоконных световодах.

Интерес к исследованию динамики формирования и взаимодействия оптических солитонов обусловлен возможностями их использования как носителей информации в системах волоконно-оптической связи, а также как идеальных пробных импульсов в спектроскопии сверхбыстрых процессов [1]. Для этих приложений большое значение имеет разработка методов управления параметрами оптических солитонов: амплитудой, длительностью, частотой. Один из методов управления основан на смещении солитонного импульса со сдвинутым по частоте управляющим импульсом. В результате их взаимодействия, обусловленного нелинейной добавкой к показателю преломления, параметры солитона изменяются. Эффективность такого подхода была ранее продемонстрирована применительно к одномодовому волоконному световоду [2].

В настоящей работе объектом исследования является двухмодовый световод, в котором возможно формирование двухкомпонентных солитонов [3]. Использование двухмодовых световодов открывает дополнительные возможности для управления параметрами, так как солитонный и управляющий импульсы могут распространяться в различных (ортогональных в линейном приближении) модах. Анализ этих возможностей составляет предмет нашей работы.

Математической моделью рассматриваемого процесса служит задача Коши для векторного нелинейного уравнения Шрёдингера:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau^2} + (|\Psi_1|^2 + \gamma |\Psi_2|^2) \Psi_1, \\ i \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \tau^2} + (\gamma |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) \Psi_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Этим уравнениям удовлетворяют комплексные амплитуды временных огибающих в первой и во второй модах: Ψ_1 и Ψ_2 [3]. Переменная z — это расстояние, пройденное импульсами по световоду и выраженное в дисперсионных длинах, τ — нормированное на начальную длительность «бегущее» время. Уравнения (1) описывают дисперсионное распыливание импульсов, а также эффекты фазовой само- и кросс-модуляции. Коэффициент $\gamma \sim 1$ перед кросс-модуляционным членом пропорционален интегралам перекрытия волноводных мод [1].

В качестве начальных данных рассмотрим суперпозицию солитонного и управляющего импульсов:

$$\Psi(0, \tau) = \Psi_s(0, \tau) + \delta\Psi(0, \tau), \quad (2)$$