лимирован, $\theta = (0\pm 2)^{\circ}$. В процессе эксперимента энергия вторичных частиц уменьшалась дискретно небольшими порциями при помощи сменных фильтров, устанавливаемых поочередно перед входным окном прибора. Из зарегистрированных ядер по результатам обработки мы отобрали для каждого фильтра одинаковое число ядер углерода, остановившихся в 3-й камере прибора (ядер углерода, имеющих больший пробег, зарегистрировано не было). Всего было отобрано 80 ядер. Для них было получено $\sigma_A = 0.75$. Обработка результатов моделирования для того же числа ядер ${}^{12}_{6}$ С с N=3 и $\theta=0^{\circ}$ дала $\sigma_A=0.77$. На рис. 6 приведено сравнение распределений ядер по A, полученных из эксперимента и моделирования в тех же условиях. Хорошее согласие результатов подтверждает справедливость наших расчетов.

5. Выводы

Из приведенных результатов следует, что разработанный нами прибор способен разделять все зарегистрированные им ядра по Z, а по A — включая кислород. Этот диапазон может быть несколько расширен, если для разделения по A использовать примерно 50% зарегистрированных ядер, пробег которых заканчивается за пределами области неоднозначности приборной функции.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Григоров Н. Л., Крючков Б. В., Лопатин В. Н. и др.//Приб. и техн. :эксперимента. 1990. № 1. С. 51. [2] Калашникова В. И., Козодаев М. С. Детекторы элементарных частиц. М., 1966.

Поступила в редакцию 26.11.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 3

ЗУДК 539.172.3 : 519.25

ВЛИЯНИЕ НЕТОЧНОСТИ ОПИСАНИЯ ТОРМОЗНОГО СПЕКТРА НА ВОССТАНОВЛЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ФОТОЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Г. Р. Аветисян, В. И. Макеев, Ю. П. Пытьев

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики; НИИЯФ)

Рассмотрено влияние неточности описания тормозного спектра на восстановление сечений фотоядерных реакций методами математического моделирования и редукции измерений. Показано, что в пределах достигнутых точностей фотоядерных экспериментов учет влияния реалистического распределения заряда в атоме, а также вклада членов ~m_e в амплитуду процесса формирования тормозного излучения не приводит к значительным различиям в восстановленных сечениях фотоядерных реакций.

1. Введение

При восстановлении сечений фотоядерных реакций погрешность в полученных результатах обусловлена статистическим разбросом и систематической погрешностью выходов реакций, а также ошибками в описании формы тормозного спектра. Форма тормозного спектра у-из-

лучения, падающего на исследуемую мишень, зависит от конкретных условий эксперимента, которые не всегда могут быть корректно учтены. Как правило, при восстановлении сечений используется форма тормозного спектра, полученная в расчетах Шиффа [1], которая может привести к существенным отклонениям восстановленного по измерениям сечения от истинного. В расчетах [1] при вычислении амплитуды пренебрегается вкладом слагаемых ~ m_e. В отличие от расчетов [1], в работах [2, 3] выполнены расчеты процессов формирования тормозного излучения с учетом вклада слагаемых, пропорциональных me, в амплитуду процесса. В этих же работах учтено влияние эффектов, которые обусловлены распределением плотности заряда электронов в атоме, полученным в рамках модели Томаса-Ферми, а также учтен эффект отдачи атома, заметный при испускании тормозных фотонов на углы ~ m_e/E и в области верхней границы спектра тормозного излучения. При различных углах эмиссии фотонов могут возникать различия между расчетами [2, 3] и расчетами [1], достигающие десятков процентов. Исследованию влияния различий описания формы тормозного спектра на восстановленное сечение посвящена настоящая работа. В основе анализа лежат методы математического моделирования и редукции измерений, развитые в работах [4-6].

2. Методы определения влияния деформации тормозного спектра на восстановление сечения фотоядерных реакций

Для определения влияния различий в описании формы тормозного спектра на форму восстановленного сечения фоторасщепления ядер использовался следующий подход. На основе известных экспериментальных данных по сечениям фотонейтронных реакций $\sigma_{int}(E)$ [7] рассчитывался выход реакций $Y(E_{T}^{m})$

$$Y(E_{\gamma}^{m}) = \int_{E_{\text{th}}}^{E_{\gamma}^{m}} W(E, E_{\gamma}^{m}) \sigma_{\text{int}}(E) dE, \qquad (1)$$

где $E_{\text{th}}, E_{\tau}^{m}$ — энергия порога реакции и верхняя граница спектра тормозного излучения. Расчеты выполнялись для тормозного спектра $W(E, E_{\tau}^{m}) \equiv W^{TF}(E, E_{\tau}^{m})$, полученного в работе [3] для распределения плотности заряда электронов в атомах и описываемого моделью Томаса—Ферми. Выход реакций вычислялся для значений E_{τ}^{m} начиная от порога реакций до 31 МэВ с шагом 1 МэВ.

Интегральное уравнение (1) заменялось дискретным аналогом

$$Y(E_{\gamma j}^{m}) = \sum_{i=1}^{J} W(E_{i}, E_{\gamma j}^{m}) \sigma_{\text{int}}(E_{i}) \Delta E_{i}, \qquad (2)$$

(3)

и задача определения $\sigma_{int}(E)$ сводилась к решению системы алгебраических уравнений

$$Y = W\sigma$$

относительно $\sigma = (\sigma_{int}(E_i), \ldots, \sigma_{int}(E_{20})).$

В связи с тем что в уравнении (3) матрица $W = \{W_{ij}\}$ плохо обусловлена, прямые методы обращения W не работают. Поэтому в работе использовался метод псевдообращения и находилось нормальное псевдорешение (3) [4]. При этом расчеты сечений проводились на основе мо-

дели тормозных спектров, полученных в расчетах Шиффа [1]: $W^{\text{sh}}(E, E_{1}^{m})$ и расчетах [3], где использовался феноменологический формфактор Шиффа $W^{\text{FS}}(E, E_{1}^{m})$. Сравнивались восстановленные сечения, полученные для этих форм тормозного спектра: $\sigma^{\text{sh}}(E)$ — при $W(E, E_{1}^{m}) \equiv W^{\text{sh}}(E, E_{1}^{m})$, и $\sigma^{\text{FS}}(E)$ — при $W(E, E_{1}^{m}) \equiv W^{\text{FS}}(E, E_{1}^{m})$ с исходным сечением $\sigma_{\text{int}}(E)$ в (1). Сравнение выявило заметные расхождения кривых, начиная с энергии 21 МэВ (рис. 1, a, δ).



Рис. 1. Результаты расчетов сечений фотонейтронной реакции на ${}^{90}Zr$ (a) и ${}^{76}Se$ (б) методом псевдообратной матрицы из не подвергавшейся статистическим возмущениям кривой выхода $Y(E_{\tau}^m)$: исходное сечение $\sigma_{int}(E)$ (сплошная линия), восстановленное сечение $\sigma^{Sh}(E)$ (штриховая), восстановленное сечение $\sigma^{FS}(E)$ (штрих-пунктир)

Поскольку экспериментальные величины выходов $Y_{exp}(E_T^m)$ испытывают статистические флуктуации относительно рассчитанных согласно (1) значений $Y(E_T^m)$, необходимо исследовать вопрос об их влиянии

на восстановленные сечения фоторасщепления ядер. Для этого к полученным согласно (2) $Y(E_{\tau}^{m})$ добавлялась случайная погрешность, нормально распределенная с дисперсией $[Y(E_{\tau}^{m})]^{1/2}$ и нулевым средним. Другими словами, вместо уравнения (2) рассматривалось следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}, W_{12}, \dots, W_{1N} \\ W_{21}, W_{22}, \dots, W_{2N} \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ W_{N1}, W_{N2}, \dots, W_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}.$$
(4)

где N — число измерений при различных верхних границах у-спектра E_1^m , v_i ($i=1, \ldots, N$) — ошибки измерений, нормально распределенные по закону $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ с заданным корреляционным оператором

S	$Y^{1/2}$ $Y^{1/2}$	0	
4	0	$\cdot \left(\frac{1}{Y^{1/2}} \right)^{\cdot}$	

В случае тормозного излучения матрица W — треугольная, т. е.

Из полученных таким образом значений $Y_{\exp}(E_{\gamma}^{m})$ (при $W(E, E_{\gamma}^{m}) \equiv W^{TF}(E, E_{\gamma}^{m}))$ с помощью метода редукции вычислялись сечения $\sigma^{TF}(E)$, $\sigma^{FS}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$ с использованием соответственно трех различных форм тормозного спектра: $W^{TF}(E, E_{\gamma}^{m})$, $W^{FS}(E, E_{\gamma}^{m})$ и $W^{Sh}(E, E_{\gamma}^{m})$. Сечения $\sigma^{TF}(E)$, $\sigma^{FS}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$ сравнивались между собой. Вычислялись относительные ошибки сечений $\sigma^{FS}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$, которые затем сравнивались с ошибками, полученными в реальных КМИ-и ТИ-экспериментах (рис. 2).





В рамках данного подхода выполнена обработка выходов $Y_{\exp}(E_{\tau}^{m})$. В обработке использовался изложенный в п. 3 метод редукции, позволяющий эффективно восстанавливать сечения.

3. Задача редукции к идеальному прибору

Равенство (4) запишем в виде следующей схемы измерения сечения:

 $Y = W \sigma + v$.

(5)

(6)

Здесь вектор Y — результат измерения на приборе W, линейный оператор W и шум v с заданным корреляционным оператором Σ определяют модель измерения σ [5].

Запишем линейное преобразование равенства (5):

 $RY = I\sigma + (RW - I)\sigma + Rv.$

Если RW=I, то RY интерпретируется как искаженный шумом Rvвыходной сигнал идеального прибора I, заданного единичной матрицей. Если $RW \neq I$, то интерпретации RY как о свойственны ошибки двух типов. Слагаемое Rv - шум, не связанный с о, а (RW-I) — искажение, зависящее от неизвестного о, т. е. ложный сигнал [6]. Если уровеньшума слишком велик, то находить R при условии RW=I нецелесообразно. В таком случае, допустив минимальный ложный сигнал, можно уменьшить шум и тем самым сбалансировать влияние обеих ошибок. Поэтому для определения R решалась задача редукции к идеальному прибору в следующей постановке:

$$\inf (||RW - I||_2 / E ||Rv||^2 \le \varepsilon) = ||R_sW - I||_2,$$

где $||RW-I||_2 = [Tr(RW-I)(RW-I)^*]^{1/2}$. Ее решение выражается формулой [5]

 $R_{s} = \begin{cases} R(\omega) = W^{*} (WW^{*} + \omega\Sigma)^{-1}, \ \omega = \omega_{\varepsilon}, \ 0 < \varepsilon < h(0), \\ 0, \ \varepsilon = 0, \\ (W^{*}W)^{-1} W^{*}, \ \varepsilon \ge h(0), \end{cases}$

где $h(0) = \text{Tr}(W^*\Sigma^{-1}W)^-, \omega_e - единственный корень уравнения <math>h(\omega) = = \|R(\omega)v\|^2 = \varepsilon$. Для данного ε оператор R_e определен так, что оператор $R_*W -$ ближайший к *I*, а уровень шума ограничен неравенством $E\|R_ev\|^2 \ll \varepsilon$.

4. Обсуждение результатов и выводы

Изложенные в пп. 2 и 3 методы были использованы для исследования влияния неточности описания тормозного спектра на восстановление сечений фотонейтронных реакций. Анализировались ситуации, когда фотонейтронные сечения описываются одной и двумя лоренцевыми кривыми. В качестве модели сечения, описываемого одним лоренцианом, использовалось полное сечение фотонейтронной реакции на ⁹⁰Zr; в качестве модели сечения, описываемого совокупностью двух лоренцианов, использовано фотонейтронное сечение ⁷⁶Se [7].

Сечения для вышеуказанных моделей восстанавливались следующими способами:



— методом псевдообратной матрицы без учета статистического разброса (рнс. 1, α , δ);

— методом редукции с учетом статистического разброса с параметром $\omega \rightarrow 0$ (рис. 3, *a*);

— методом редукции с минимизацией полной погрешности $H(\omega) = = E ||RY - I_{\sigma}||^2 = ||(RW - I)_{\sigma}||^2 + E ||R_{v}||^2$ выбором параметра ω (рис. 3, 6, θ).

Заметим что, если σ — априори произвольный вектор, то оценить полную погрешность невозможно, но, так как в данном случае σ — это известное модельное сечение, можно минимизировать полную погрешность (рис. 4). На рис. 1 сплошной линией показано исходное сечение фотонейтронной реакции на ядре ⁹⁰Zr, на основе которого по (1) была рассчитана кривая выхода $Y(E_{\tau}^m)$. Сечения, восстановленные из кривой выхода $Y(E_{\tau}^m)$ методом псевдообратной матрицы, показаны штриховой и штрих-пунктирной линиями. Штриховая линия отвечает сечению $\sigma^{sh}(E)$, полученному при описании тормозного спектра в расчетах



Рис. 3. Результаты расчетов сечений фотонейтронной реакции методом редукции при $\omega \rightarrow 0$ на ⁷⁶Se (a) и методом редукции с минимизацией полной погрешности на ⁷⁶Se (b) и ⁹⁰Zr (s). Результаты получены из кривой выхода $Y_{\exp}(E_T^m)$ при статистическом разбросе величин $Y(E_T^m)$: восстановленные сечения $\sigma^{TF}(E)$ (сплошная линия), $\sigma^{Sh}(E)$ (штриховая) й $\sigma^{FS}(E)$ (штрих-пунктир)

Шиффа: $W(E, E_{\gamma}^{m}) \equiv W^{\text{sh}}(E, E_{\gamma}^{m})$, штрих-пунктирная — сечению $\sigma^{\text{Fs}}(E)$, полученному при описании тормозного спектра с формфактором Шиффа: $W(E, E_{\gamma}^{m}) \equiv W^{\text{Fs}}(E, E_{\gamma}^{m})$ [3]. Сравнение сечений $\sigma^{\text{Fs}}(E)$, $\sigma^{\text{sh}}(E)$ с сечением $\sigma_{\text{int}}(E)$ показывает, что изменение формы тормозного спектра не приводит к существенным искажениям в описании ширины и амплитуды резонансной кривой. В то же время при энергиях больше 21 МэВ возникают колебания сечений $\sigma^{\text{Fs}}(E)$, $\sigma^{\text{sh}}(E)$, не имеющие места в энергетической зависимости восстанавливаемого сечения. Тем не менее расхождения сечений $\sigma^{\text{Fs}}(E)$, $\sigma^{\text{sh}}(E)$ и $\sigma_{\text{int}}(E)$ находятся в пределах достигаемой в настоящее время точности эксперимента.

На рис. 1, б показаны результаты расчета сечений фотонейтронной реакции на ⁷⁶Se, описываемых двумя лоренцианами, обозначение и метод восстановления те же, что и на рис. 1, а. Как следует из представ-

Рис. 4. Графики зависимостей погрешности $H(\omega) = E ||RY - I\sigma||^2$ (1), уровни шума $h(\omega) = E ||Rv||^2$ (2) и ложного сигнала $||(RW - I)\sigma||^2$ (3) в случае модели Томаса-Ферми. При $\omega = \omega_0 \approx 0,031$ наблюдается минимум $H(\omega)$



ленных данных, воспроизводятся ширина и амплитуда резонансного максимума. При энергиях больше 21 МэВ и в области максимума наблюдаются незначительные флуктуации сечений $\sigma^{FS}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$, не имеющие места для исходного сечения $\sigma_{int}(E)$. Однако в пределах точности современного эксперимента сечения $\sigma_{int}(E)$, $\sigma^{FS}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$ оказываются практически неразличимыми.

На рис. 3, а показаны результаты расчета сечения $\sigma(E)$ для фотонейтронной реакции на ⁷⁶Se, полученные при решении задачи редукции (6) к идеальному прибору [6] для схемы измерения (5), где в качестве $W(E, E_T^m)$ выбирались соответственно тормозные спектры $W^{\text{TF}}(E, E_T^m)$, $W^{\text{FS}}(E, E_T^m)$ и $W^{\text{Sh}}(E, E_T^m)$ с параметром $\omega \rightarrow 0$, а выходы $Y_{\exp}(E_T^m)$ получены после добавления к значениям $Y(E_T^m)$ случайной погрешности, нормально распределенной с дисперсией $[Y(E_T^m)]^{1/2}$ и нулевым средним. Как следует из представленных данных, статистический разброс выходов приводит к значительным осцилляциям в восстановленном сечении при их отсутствии в исходном сечении в области энергий E >>21 МэВ. Из рис. 3, а видно, что шум перекрывает все те колебания в спектрах, которые восстанавливались без статистического разброса с учетом неточности описания формы тормозного спектра.

При вычислении сечений по схеме измерения (5) метод редукции [5] приводит к двум неопределенностям: шуму и ложному сигналу. При этом уменьшение шума приводит к возрастанию ложного сигнала, и наоборот. Неопределенность восстановления сечения представляет собой сумму двух величин — шума и ложного сигнала. При решении задачи редукции (6) для схемы измерения (5) параметр о [5] выбирался условия минимума полной погрешности $H(\boldsymbol{\omega}) = E \| RY - I\sigma \|^2 =$ ИЗ $= \| (\ddot{R}W - I) \sigma \|^2 + E \| \ddot{R} v \|^2$. На рис. 4 показаны графики зависимостей $H(\omega), \| (RW-I)\sigma \|^2$ и $E \| Rv \|^2$ для модели Томаса—Ферми. С помощью численного эксперимента был найден минимизирующий параметр ω_0 . Восстановленное таким образом сечение $\sigma^{TF}(E)$ фотонейтронной реакции на ядре ⁷⁶Se с формой спектра $W(E, E_{T}^{m}) = \overline{W}^{TF}(E, E_{T}^{m})$ показано на рис. 3, б.

Сравнение восстановленных сечений $\sigma^{TF}(E)$ и исходного сечения $\sigma_{int}(E)$ на рис. 3, a, б показывает, что, минимизируя погрешность редукции $H(\omega)$, можно существенно уменьшить флуктуации восстановленного сечения $\sigma^{TF}(E)$ относительно исходного $\sigma_{int}(E)$. При этом восстановленное сечение $\sigma^{TF}(E)$ приближается к исходному $\sigma_{int}(E)$. Выполненные расчеты также показали, что неопределенности восстановленного сечения после минимизации полной погрешности (см. рис. 3, б) уменьшаются в 1,5-3 раза по сравнению с неопределенностями без минимизации (см. рис. 3, a). На рис. 3, 6 штриховой и штрих-пунктирной линиями показаны результаты восстановления сечений $\sigma^{FS}(E)$ и $\sigma^{Sh}(E)$ из кривых выхода $Y_{exp}(E_{7}^{m})$, полученных при статистическом разбросе величин $Y(E_1^m)$. Расчеты сечений $\sigma^{sh}(E)$ и $\sigma^{Fs}(E)$ проведены для форм тормозного спектра $W(E, E_1^m) \equiv W^{\text{Sh}}(E, E_1^m)$ и $W(E, E_{\tau}^{m}) \equiv$ $= W^{\text{PS}}(E, E_{\tau}^{m})$ соответственно в рамках описанного в настоящей работе метода. В области максимума сечения, а также при энергиях E>>21 МэВ наблюдаются колебания сечений $\sigma^{TF}(E)$, $\sigma^{FS}(E)$, $\sigma^{Sh}(E)$, отсутствующие в исходном сечении $\sigma_{int}(E)$. В то же время в пределах достигнутых точностей фотоядерных экспериментов эти сечения оказываются неразличимыми, при этом ошибки восстановленных сечений по сравнению с реальными экспериментами составили 2-6%. Неразличимость сечений подтверждается посчитанными надежностями [8] соответствующих моделей: $W^{\text{TF}}(E, E_{\tau}^{m}), W^{\text{sh}}(E, E_{\tau}^{m})$ и $W^{\text{Fs}}(E, E_{\tau}^{m})$. За характеристику надежности была принята статистика $t(\xi) =$

= $||S^{-1/2}(\xi - Af_0)||^2 = ||(AFA^* + \Sigma)^{-1/2}(\xi - Af_0)||^2$, которая в случае верной модели имеет распределение $\chi^{2}_{n,0}$. В нашем случае $\xi = Y_{exp}(E_{\gamma}^{m})$, $f_0 = 0$ [8]. Результаты расчета надежности, приведенные в таблице для всех трех моделей, практически близки.

На рис. 3, в показаны результаты восстановления сечений фотонейтронной реакции на ⁹⁰Zr $\sigma^{\rm TF}(E)$, $\sigma^{\rm Sh}(E)$ и $\sigma^{\rm FS}(E)$ из кривой выхода $Y_{\rm exp}(E_{\rm T}^m)$ в рамках развитого в настоящей работе метода.

Как видно из представленных данных для реакций, сечения которых аппроксимируются одним лоренцианом, восстановленные сечения также обнаруживают флуктуации, отсутствующие в исходном сечении. Однако в пределах достигнутых точностей эксперимента исходное и восстановленные сечения оказываются практически неразличимыми.

Полученные в результате предложенного анализа результаты позволяют прийти к следующему выводу. В пределах достигнутых точностей фотоядерных экспериментов учет влияния реалистического распределения заряда в атоме, а такСравнение надежностей трех моделей $W^{\text{TF}}(E, E_{\gamma}^{m}), W^{\text{Sh}}(E, E_{\gamma}^{m})$ и $W^{\text{FS}}(E, E_{\gamma}^{m})$ с одной и двумя

лоренцевыми кривыми

	Надежн	Надежность t (ξ)		
Модели	один лоренциан	два ло- ренциана		
TF $(W^{\text{TF}}(E, E_{\gamma}^{m}))$	0,09	0,17		
Sh $(W^{\mathrm{Sh}}(E, E_{\gamma}^{m}))$	0,06	0,10		
$\overline{\mathrm{FS}\left(W^{\mathrm{FS}}\left(E, \ E_{\gamma}^{m}\right)\right)}$	0,08	0,18		

же вклада членов $\sim m_e$ в амплитуду процесса формирования тормозного излучения не приводит к значительным различиям в восстановленных сечениях фотоядерных реакций.

Авторы благодарят проф. Б. С. Ишханова за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Schiff L. I.//Phys. Rev. 1951. 83. Р. 252. [2] Габелко А. С., Ишханов Б. С., Макеев В. И.//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Ядерные константы. 1989. № 4. С. 104. [3] Габелко А. С., Ишханов Б. С., Макеев В. И.//Тез. докл. 40-го совещ. по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Л., 1990. С. 30.
[4] Пытьев Ю. П.//Матем. сб. 1983. 118 (160), № 1 (5). С. 19. [5] Пытьев Ю. П.// Иматем. сб. 1983. 120 (160), № 2 (5). С. 240. [6] Пытьев Ю. П. Математические методы интерпретации эксперимента. М., 1989. [7] Вег та п. В. L. Preprint UCRL-78482. Livermore, 1976. [8] Пытьев Ю. П.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1986. 27, № 3. С. 14.

Поступила в редакцию 23.01.91