ЛИТЕРАТУРА

[1] Галечян Г. А.//Химия плазмы. 1978. № 7. С. 218. [2] Березин И. А.// //Опт. и спектр. 1969. 26. С. 855. [3] Davis C. C., King T. A.//ICPIG. London, 1972. P. 127. [4] Amemiya H.//J. Phys. Soc. Japan. 1988. 57, N 3. P. 887. [5] Thompson J. B.//Proc. Phys. Soc. 1959. 73. P. 818. [6] Райзер Ю. П. Физика газового разряда. М., 1987. С. 79. [7] Ellis H. W., McDaniel E. W., Albritton D. L. et al.// //Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1978. 22, N 3. P. 190. [8] Левитский С. М. Сборник задач и расчетов по физической электронике. Киев, 1964. С. 192. [9] Philip C. M., Coulter J. R. M.//Phys. Lett. 1970. 32A, N 4. P. 259. [10] Yenng T. H. Y.// //Proc. Phys. Soc. 1958. 71. P. 341. [11] Мак-Даниель И., Мэзон Э. Подвижность и диффузия ионов в газах. М., 1976. С. 24. [12] Девятов А. М., Калинин А. В., Ли Сын Чан, Мийович С. Р.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1991. 32, № 3. С. 32.

Поступила в редакцию
06.06.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 3

УДК 621.371.31

ПРОБЛЕМА ЭРГОДИЧНОСТИ МНОГОМОДОВЫХ СИГНАЛОВ

А. Г. Вологдин, В. Д. Гусев

(*кафедра физики атмосферы и математической геофизики*)

Показаны широкие возможности исследования эргодичности стационарных случайных процессов с использованием характеристических функций. Рассмотрена стохастическая интерференционная модель сигнала, стационарная при любом числе составляющих ее мод. Доказана ее эргодичность относительно характеристической функции, плотности вероятности и моментов при числе мод $m=1,2$. Исследованы вопросы практического использования полученных результатов при конечном времени усреднения.

Качество работы радиоприемных устройств различного назначения сильно зависит от статистических свойств ионосферного радиосигнала. Как известно, в общем случае радиосигнал для произвольных радиотрасс имеет многомодовую структуру со стохастическими свойствами. С точки зрения особенностей работы радиоприемных систем существенно проявление стохастичности сигнала на интервале времени приема или обработки информации. При оценке этого воздействия пользуются статистическими характеристиками. Сама же оценка справедлива только лишь в условиях эргодичности принимаемого стохастического радиосигнала. Однако проблема эргодичности не является очевидной при произвольных моделях радиосигналов. Кроме этого, при исследовании статистических свойств радиосигналов, рассеянных в ионосфере, необходимо учитывать тот факт, что экспериментальные данные могут быть получены только в результате натурных испытаний. Последние являются, как правило, неповторимыми, и это ведет к тому, что вместо ансамбля реализаций приходится иметь дело с одной-единственной выборкой. Следовательно, в этом случае также встает проблема эргодичности изучаемых процессов.

В известных монографиях [1, 2] решение вопроса об эргодичности разбивается на две части. В первой части доказывается стационарность случайного процесса для рассматриваемых моделей радиосигнала. Во второй части анализируются условия реализуемости эргодичности для этих моделей. Рассмотрим проблему в такой же последовательности.

1. Стационарность многомодовых ионосферных радиосигналов

В настоящей работе предлагается решение проблемы эргодичности в отношении стохастической интерференционной модели коротковолновых сигналов, учитывающей и многомодовость сигналов, и вероятностный характер их свойств [3, 4].

Следуя этой модели, принимаемый радиосигнал представляем в виде суммы m сигналов (мод), каждый из которых является суперпозицией квазирегулярной (зеркальной) $E_{0i}(t)$ и рассеянной $E_{pi}(t)$ компонент:

$$E(t)=\sum_{i=1}^{m}[E_{0i}(t)+E_{pi}(t)]. \tag{1}$$

Квазирегулярную и рассеянную компоненту каждой моды с учетом доплеровского смещения Ω_i несущей частоты ω_0 можно представить в виде

$$E_{0i}(t)=A_i\cos(\psi_0 t-\Omega_i t-\varphi_{0i}),\ \ E_{pi}(t)=a_i(t)\cos(\omega_0 t-\Omega_i t-\psi_{0i}). \tag{2}$$

Считаем здесь амплитуды A_i квазирегулярных компонент постоянными, а огибающие $a_i(t)$ рассеянных компонент — медленно меняющимися на периоде $T_0=2\pi/\omega_0$ случайными процессами. Предполагаем, что все компоненты в сигнале (1) статистически независимы, рассеянные компоненты $E_{pi}(t)$ стационарны и эргодичны и имеют нормальный закон распределения вероятности с нулевым средним, а случайные фазы φ_{0i} квазирегулярных компонент — равномерный закон распределения вероятности на интервале $[0, 2\pi]$, $\Omega_i=\text{const}$.

Доказательство стационарности принимаемого радиосигнала (1) следует из свойств плотности вероятности и характеристической функции. Известно [1], что стационарным случайным процессом называется процесс с плотностью вероятности, не зависящей от текущего времени t. Так как характеристическая функция Θ и плотность вероятности W связаны фурье-преобразованием, то из независимости от времени W следует независимость от времени Θ и обратно. Таким образом, при исследовании стационарности можно ограничиться изучением свойств характеристической функции.

Для модели (1) одномерная и двумерная характеристические функции в соответствии со свойствами отдельных мод (2) равны

$$\Theta_1(v)=\prod_{i=1}^{m}J_0(A_i v)\exp\{-\sigma_i^2 v^2/2\}, \tag{3}$$

$$\Theta_2(v_1,\ v_2,\ \tau)=\prod_{i=1}^{m}J_0\left(A_i\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\omega_i\tau}\right)\times \tag{3}$$

$$\times\exp\{-\sigma_i^2[v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\rho_i(\tau)]/2\}, \tag{4}$$

где σ_i^2 — дисперсия, а $\rho_i(\tau)$ — коэффициент автокорреляции процесса $E_{pi}(t)$, $\omega_i=\omega_0-\Omega_i$, $J_0(x)$ — функция Бесселя. Аналогично можно получить n-мерную характеристическую функцию. Во всех случаях Θ_1, Θ_2, …, Θ_n зависят только от разности моментов времени типа $\tau=t_2-t_1$, что и позволяет утверждать, что сигнал (1) стационарен. Очевидно, что отсюда следует и стационарность для моментов: начальных, центральных и смешанных.

2. Общая проблема эргодичности случайных процессов

Эргодичность случайного процесса $E(t)$ обычно рассматривают для различных функций $f[E(t)]$ [2]. При положительном исходе утверждается, что процесс $E(t)$ эргодичен относительно функции $f[E(t)]$. В этом плане сюда относится и анализ эргодичности относительно характеристической функции $\Theta(v)$.

В качестве оценки (выборочного значения) характеристической функции на интервале $[0, T]$ можно принять среднеинтегральное значение

$$\Theta_T(v) = \frac{1}{T}\int_0^T \exp\{ivE(t)\}\,dt. \tag{5}$$

Применяя операцию математического ожидания к обеим частям равенства, получим, что для стационарного процесса $E(t)$ имеет место несмещенность оценки

$$\langle \Theta_T(v) \rangle = \Theta(v),$$

где $\Theta(v)$ — характеристическая функция генеральной выборки.

В основе доказательства эргодичности $E(t)$ относительно $\Theta(v)$ лежит анализ поведения дисперсии D_{Θ_T} выборочного значения $\Theta_T(v)$ при $T \to \infty$, т. е. исследование предела

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v, -v) = \lim_{T\to\infty} [\langle \Theta_T(v)\,\Theta_T^*(v)\rangle - \langle \Theta_T(v)\rangle \langle \Theta_T^*(v)\rangle] \to 0, \tag{6}$$

где звездочка — знак комплексного сопряжения.

Следствия. Если доказана эргодичность процесса $E(t)$ относительно характеристической функции $\Theta(v)$, то из этого вытекают следствия, касающиеся эргодичности относительно моментов. Известно, что характеристическая функция представима в виде ряда

$$\Theta_T(v) = 1 + ivm_{1T} - v^2 m_{2T}/2 + \ldots, \tag{7}$$

где m_{1T}, m_{2T}, ... — выборочные начальные моменты. Тогда при эргодичности процесса $E(t)$ при любых значениях параметра v из (7) следует эргодичность относительно математического ожидания m_1, так как

$$\lim_{v\to 0} \frac{\Theta_T(v) - 1}{iv} = m_{1T}.$$

Аналогично можно получить соответствующие утверждения относительно моментов любого порядка.

Если рассмотреть двумерную характеристическую функцию, то можно получить условия эргодичности относительно смешанных моментов, т. е. относительно корреляционных функций разных порядков.

Выполнение условия (6) позволяет решить проблему эргодичности процесса $E(t)$ относительно плотности вероятности. Используя оценку (5), можно записать выборочную плотность вероятности:

$$W_T(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_T(v) \exp\{-ivE\}\,dv = \frac{1}{T}\int_0^T \delta[E_1(t) - E]\,dt, \tag{8}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Это выражение дает число пересечений случайным процессом $E_1(t)$ уровня «E» [5]. Очевидно, что определение

(8) практически совпадает с оценкой выборочного распределения $W_T(E)$, предложенной в работе [1]. Так же, как и выше, можно ввести D_{W_T} — дисперсию оценки выборочной плотности вероятности:

$$D_{W_T} = \langle W_T^2(E) \rangle - \langle W_T(E) \rangle^2, \tag{9}$$

где учитывается, что $W_T(E)$ является действительной функцией. Совместное использование (8) и (9) позволяет выразить дисперсию D_{W_T} через дисперсию D_{Θ_T} и в пределе при $T \to \infty$ получить

$$\lim_{T\to\infty} D_{W_T} = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} D_{\Theta_T}(v_1, v_2) \exp\{iE(v_1 - v_2)\} dv_1 dv_2.$$

Полагая здесь справедливым изменение порядка действий, внесем знак lim под интеграл. В результате предельное условие

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v_1, v_2) = \lim_{T\to 0} [\langle \Theta_T(v_1) \Theta_T^*(v_2) \rangle - \langle \Theta_T(v_1) \rangle \langle \Theta_T^*(v_2) \rangle] = 0 \tag{10}$$

приводит к эргодичности относительно плотности вероятности, так как тогда имеем

$$\lim_{T\to\infty} D_{W_T} = 0.$$

Очевидно, что условие (10) является более общим, чем (6).

Таким образом, в заключение этого раздела отметим, что решение задачи об эргодичности относительно характеристических функций позволяет ответить на вопрос об эргодичности относительно других вероятностных характеристик исследуемых процессов.

3. Эргодичность многомодового сигнала

Прежде всего остановимся на эргодичности одномодового ($m=1$) сигнала (1). За оценку характеристической функции примем (5). С учетом сказанного выше при использовании стандартного преобразования двухкратного интеграла в однократный по $\tau = t_2 - t_1$ [1] дисперсия (10) равна

$$D_{\Theta_T}(v_1, v_2) = \frac{2}{T} \int\limits_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) [\Theta_2(v_1, v_2\ \tau) - \Theta_1(v) \Theta_1^*(v_2)] d\tau,$$

где Θ_2 и Θ_1 — двумерная и одномерная характеристические функции. При подстановке сюда (3) и (4) при $m=1$ получаем

$$D_{\Theta_T}(v_1, v_2) = \frac{C}{T} \int\limits_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \{J_0(A_1 \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \omega_1 \tau}) \times$$

$$\times \exp\{\sigma_1^2 v_1 v_2 \rho_1(\tau)\} - J_0(A_1 v_1) J_0(A_1 v_2)\} d\tau,$$

где

$$C = 2\exp\{-\sigma_1^2(v_1^2 + v_2^2)/2\}.$$

Применяя тождественные преобразования и используя эргодичность рассеянной компоненты $E_{\rho 1}(t)$, переходим к пределу

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v_1,\ v_2)=C\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\left[J_0\left(A_1\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\omega_1\tau}\right)-\right.$$

$$\left.-J_0(A_1v_1)\,J_0(A_1v_2)\right]d\tau.$$

После введения переменной $\alpha=\omega_1\tau$ интеграл в пределах интегрирования от $\alpha_1=0$ до $\alpha_2=\omega_1T=2\pi T/T_1$ разобьем на сумму N интегралов с интервалами интегрирования длиной 2π плюс интеграл на интервале от $2\pi N$ до $2\pi T/T_1$. Здесь $N\leqslant T/T_1$ — целое число периодов T_1, укладывающихся на интервале $[0,\ T]$. Последним интегралом при $N\gg 1$ можно пренебречь. В результате после сложения интегралов имеем

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v_1,\ v_2)=\frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[J_0\left(A_1\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}\right)-\right.$$

$$\left.-J_0(A_1v_1)\,J_0(A_1v_2)\right]d\alpha\equiv 0$$

в соответствии со значением интеграла [6] и с использованием теоремы о суммируемости интегралов [7].

Следовательно, одномодовый сигнал в рамках модели (1), (2) является эргодическим процессом относительно характеристической функции, плотности вероятности и моментов.

Обратимся теперь к двухмодовому ($m=2$) сигналу (1). Выражение для дисперсии (10) в этом случае после перехода к пределу и применения использованных выше способов оценки имеет вид

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v_1,\ v_2)=C_1\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi N}\int\limits_0^{2\pi N}\left[J_0\left(A_1\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\alpha}\right)\times\right.$$

$$\left.\times J_0\left(A_2\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\nu\alpha}\right)-J_0(A_1v_1)\,J_0(A_1v_2)\,J_0(A_2v_1)\,J_0(A_2v_2)\right]d\alpha, \tag{11}$$

где, как и ранее, $N\leqslant T/T_1$, $T_1=2\pi/\omega_1$, а $\nu=\omega_2/\omega_1$, $\alpha=\omega_1\tau$ и $C_1=2\exp\{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(v_1^2+v_2^2)/2\}$. Используя «теорему сложения» для бесселевых функций [8], интегрируем и затем меняем порядок операций суммирования и перехода к пределу, что оправдано сходимостью рядов. Это позволяет получить

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v_1,\ v_2)\sim 2C_1\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}J_k(A_1v_1)\,J_k(A_1v_2)\,J_l(A_2v_1)\,J_l(A_2v_2)\times$$

$$\times\lim_{N\to\infty}\frac{\sin 2\pi N\,(k-l\nu)}{2\pi N\,(k-l\nu)}\equiv 0 \tag{12}$$

при одном условии, что $k\neq l\nu$, которое выполняется при произвольном иррациональном $\nu=\omega_2/\omega_1$. Для ионосферы это осуществляется всегда ввиду неквантованности частот ω_i.

Таким образом, двухмодовый сигнал (1), (2) с иррациональным соотношением частот ω_i является эргодическим процессом. Однако при $T<\infty$ дисперсия D_{Θ_T} конечна и зависит от A_1, A_2, v_1, v_2, ν, T.

В том случае, когда $\nu = m/n$, где n и m — произвольные целые числа, т. е. когда ν — рациональное число, анализ (12) показывает, что

$$\lim_{T\to\infty} D_{\Theta_T}(v_1, v_2) = 2C_1 \sum_{k=1}^{\infty} J_{mk}(A_1 v_1)\, J_{mk}(A_1 v_2)\, J_{nk}(A_2 v_1)\, J_{nk}(A_2 v_2) \neq 0. \quad (13)$$

Следовательно, при рациональном ν двухмодовый сигнал не является в строгом смысле эргодическим.

Мерой отклонения от эргодичности целесообразно взять относительную ошибку

$$\delta = \sqrt{D_{\Theta_T}} / |\Theta_1|, \quad (14)$$

позволяющую оценить степень отклонения выборочного значения характеристической функции от генерального.

Подставляя (3) и (13) в (14), имеем

$$\delta = 2\left[\sum_{k=1}^{\infty} J_k^4(z)\right]^{1/2} / J_0^2(z)$$

для частного случая $A_1 v_1 = A_1 v_2 = A_2 v_1 = A_2 v_2 = z$, $m = n = 1$. Результаты расчета δ на ЭВМ, приведенные в табл. 1, свидетельствуют, что для рационального ν при малых z процесс близок к эргодическому, а с увеличением z отклонения от эргодичности могут быть существенными.

Таблица 1

z	0,1	0,5	1,0	2,0	4,0	5,0	10,0
g, %	2	12	65	1420	305	1540	580

Отметим, что при исследовании относительной ошибки δ необходимо учитывать, что дисперсии D_{Θ_T} (см. (12), (13)) на практике определяются при больших, но все-таки конечных T ($N \gg 1$), экспериментальное же определение частот ω_i всегда ведет к рациональным числам ν. Поэтому дисперсия $D_{\Theta T}$ может быть найдена только по интегральной формуле (11) при рациональных ν. Рассчитанные с учетом этого замечания относительные ошибки (14) представлены в табл. 2. Анализ

Таблица 2

ν	δ, %			
	$N = 200$	$N = 400$	$N = 600$	$N = 800$
1	(*1*) 2,3 (*2*) 21,2 (*3*) 606	1,6 21,1 601	1,2 21,0 591	0,9 21,0 553
0,1	(*1*) 2,2 (*2*) 3,1 (*3*) 227	1,6 2,2 225	1,2 1,8 224	0,8 1,3 223
0,01	(*1*) 2,2 (*2*) 3,1 (*3*) 58	1,6 2,2 46	1,2 1,7 41	0,8 1,4 38

Расчеты проведены для $z_1 = 0{,}05$, $z_2 = 0{,}1$ (*1*); $z_1 = 0{,}5$, $z_2 = 1{,}0$ (*2*); $z_1 = 5{,}0$, $z_2 = 10{,}0$ (*3*).

данных показывает, что δ достаточно быстро ($N=200$) устанавливается и с ростом N уменьшается медленно. При достаточно малых $z_1=A_1v$, $z_2=A_2v$, которые соответствуют главным значениям характеристической функции, относительная ошибка невелика, а при больших z_1, z_2, т. е. на «хвостах» характеристической функции, может быть значительной. Отметим относительно слабую зависимость результатов от ν и одновременно сильную зависимость δ от z_1, z_2 при фиксированном N.

Данные табл. 2 могут быть использованы для оценки степени отклонения процесса от эргодичности при конечном времени усреднения, хотя и носят иллюстративный характер.

Выводы

Показаны широкие возможности использования характеристических функций для исследования проблемы эргодичности стационарных случайных процессов.

Рассматриваемая стохастическая интерференционная модель сигнала, стационарная при любом числе мод m, является эргодическим процессом относительно характеристической функции, плотности вероятности и моментов при $m=1$, 2. Заметим, что при практическом использовании этого результата необходимо учитывать как конечное время усреднения T, так и рациональность отношения частот ν.

Решение вопроса об эргодичности сигнала с числом мод $m \geqslant 3$ можно осуществить с использованием приведенных методов. При числе мод $m \to \infty$ задача превращается в исследование эргодичности нормального стационарного случайного процесса.

Приведенные результаты могут быть использованы в экспериментальной практике.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М., 1982. [2] Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. М., 1976. [3] Вологдин А. Г. Деп. ВИНИТИ № 4754-85. М., 1985. [4] Вологдин А. Г., Смородинов В. А.//Радиотехника. 1986. № 8. С. 77. [5] Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М., 1981. [6] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983. [7] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., 1948. [8] Кузнецов Д. С. Специальные функции. М., 1965.

Поступила в редакцию
28.11.90