ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 3

УДК 621.372

ЭРМИТОВСКАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПЕРЕДАЧИ ПАРАКСИАЛЬНОЙ ВОЛНЫ

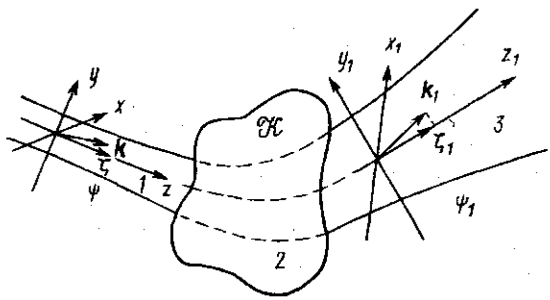
Ю. К. Алексеев, А. И. Костиенко, С. А. Крутькова

(*кафедра радиофизики*)

С использованием рэлеевского формализма в параксиальном приближении построена приближенная теория распространения гауссово-эрмитовского ограниченного волнового пучка, наклонно падающего на произвольную плоскосохраняющую электродинамическую структуру. Коэффициент передачи структуры представлен в виде быстросходящейся квадратичной эрмитовской формы, включающей в себя соответствующие плосковолновые коэффициенты и их пространственные производные. Полученная форма удобна как для численного исследования отражения, поглощения и прохождения ограниченных волновых пучков в различных средах, так и для аналитических расчетов и оценок.

Характеристики распространения параксиальной волны [1, 2] через слоистую структуру отличаются от соответствующих плосковолновых параметров, особенно заметно — в резонансном случае [3, 4]. Широкое применение многослойных покрытий и устройств (поглотителей волновой энергии, согласователей, зеркал, резонаторов и т. д.) в науке и технике обусловливает важность изучения свойств этих систем при взаимодействии с ограниченными волновыми пучками как при нормальном, так и при наклонном падении. В настоящей работе исследуется распространение такой волны через электродинамическую структуру при произвольном угле падения и достаточно общих предположениях относительно структуры.

Пусть на некоторое тело $\mathscr{K}$ падает параксиальная волна ψ (рисунок), где ψ, например, — напряженность магнитного поля. Введем



Распространение параксиального волнового пучка через произвольное плоскосохраняющее тело: *1* — падающая волна, *2* — плоскосохраняющая структура, *3* — прошедшая волна

единственное ограничение на свойства структуры $\mathscr{K}$, а именно: будем полагать, что всякая плоская волна из углового спектра ψ с достаточной точностью преобразуется телом $\mathscr{K}$ в плоскую же волну. Этому требованию удовлетворяют, например, плоские и клинообразные многослойные структуры с размерами, значительно превышающими поперечные размеры ψ, некоторые линзовые и зеркальные системы и т. д.

Для произвольной поляризации падающей волны ее можно представить в виде суперпозиции волн с поляризациями, параллельной и нормальной плоскости падения, изучить по отдельности их распространие через тело $\mathscr{K}$, затем сложить в выходной области и получить полное поле прошедшей волны. Таким образом, можно ограничиться рассмотрением случаев *TE*- и *TH*-поляризаций, которые в дальнейшем опишем единым образом.

Выберем на входе систему координат x, y, z так, чтобы орт $\mathbf{e}_z$ был направлен вдоль оси падающей волны, а плоскость (y, z) являлась плоскостью ее падения. Волновой вектор обозначим $\mathbf{k}=(\chi, \eta, \zeta)$. На выходе из системы введем другие координаты x_1, y_1, z_1 таким образом, что «центральная» плоская волна, соответствующая падающей волне с вектором $\mathbf{k}\|\mathbf{e}_z$, движется вдоль оси z_1. Здесь волновой вектор имеет компоненты $\mathbf{k}_1=(\chi_1, \eta_1, \zeta_1)$. Орты $\mathbf{e}_{1x}$ и $\mathbf{e}_{1y}$ направим таким образом, что если $\chi\neq 0$, $\eta=0$, то $\chi_1\neq 0$, $\eta_1=0$, и наоборот. В общем случае плоскость поляризации выходной волны может не совпадать с плоскостями (x_1, z_1) или (y_1, z_1), тогда под ψ_1 будем понимать длину вектора напряженности поля. Далее ограничимся случаем линейной пропорциональности поперечных компонент волновых векторов во входной и выходной областях: $\chi_1=\alpha\chi$, $\eta_1=\beta\eta$, а также будем полагать, что сохраняется ортогональность поперечных ортов: $\mathbf{e}_{1x}\perp\mathbf{e}_{1y}$.

Рассмотрим гауссово-эрмитовскую волну, падающую на тело [1]:

$$\psi=\frac{w_0}{w}H_m\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{w}\right)H_n\left(\frac{\sqrt{2}\,y}{w}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-j\,(kz-\Phi)-(x^2+y^2)\left(\frac{1}{w^2}+\frac{jk}{2R}\right)\right\}, \qquad (1)$$

здесь H_m — полином Эрмита степени m,

$$w^2=w_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2\right],\quad R=z\left[1+\left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right],$$
$$\Phi=(m+n+1)\operatorname{arctg}\frac{\lambda z}{\pi w_0^2},$$

w — полуширина пятна поля, R — радиус кривизны фронта падающей волны в сечении z; Φ — фазовая поправка, обусловленная неплоскостностью фронта; m, n — модовые индексы; λ, $k=2\pi/\lambda$ — длина волны и волновое число во входной области.

Угловой спектр $\varphi(\chi, \eta)$ падающей волны имеет следующий вид:

$$\varphi=\frac{w_0^2}{4\pi}j^{m+n}H_m\left(\frac{w_0\chi}{\sqrt{2}}\right)H_n\left(\frac{w_0\eta}{\sqrt{2}}\right)\exp\left\{-\frac{1}{4}w_0^2(\chi^2+\eta^2)\right\}, \qquad (2)$$

где $j^2=-1$.

В рэлеевском представлении полное поле ψ_1 в выходной области выглядит следующим образом:

$$\psi_1=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi t\exp\{-j\,(\alpha\chi x_1+\beta\eta y_1+\zeta_1 z_1)\}\,d\chi d\eta, \qquad (3)$$

где

$$\zeta_1\approx k_1-\frac{1}{2k_1}(\alpha^2\chi^2+\beta^2\eta^2). \qquad (4)$$

Представим плосковолновый коэффициент передачи $t(\chi, \eta)$ в виде разложения по поперечным компонентам волнового вектора:

$$t = \sum_{pq=0}^{\infty} \frac{t_{pq}}{k^{p+q}} \chi^p \eta^q, \tag{5}$$

что возможно в силу узости спектра падающей волны.

Рассмотрим некоторые примеры. Заметим, что под t понимается произвольный коэффициент передачи, т. е. это может быть как коэффициент пропускания, так и коэффициент отражения волны от $\mathscr{K}$. Так, при нормальном падении волны на плоскослоистую структуру для отраженного поля t_{pq} имеет следующий вид:

$$t_{pq} = \lambda_{pq} \frac{[(p+q)/2]!\, r^{(p+q)}}{(p+q)!\,(p/2)!\,(q/2)!},$$

где $\lambda_{pq}=1$ для p и q четных и $\lambda_{pq}=0$ в остальных случаях, $r^{(p+q)} \equiv \partial^{p+q} r^{\text{plane}}(\theta)/\partial\theta^{p+q}|_{\theta=0}$, при этом $\alpha=\beta=1$. Таким образом, t определяется лишь четными угловыми производными плосковолнового коэффициента отражения r^{plane}.

При расчете коэффициента прохождения гауссовской волны, наклонно падающей на призму, t_{pq} определяется производными от плосковолнового коэффициента пропускания t^{plane} по поперечным компонентам волнового вектора:

$$t_{pq} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} k^{p+q} \left. \frac{\partial^{p+q} t^{\text{plane}}(\chi, \eta)}{\partial\chi^p \partial\eta^q} \right|_{\theta=\theta_0},$$

здесь θ_0 — угол падения волны на призму.

При наклонном падении гауссовской волны на границу раздела двух сред для t_{pq} можно воспользоваться этим же выражением, однако в данном случае величины α, $\beta \neq 1$ и определяются законом Снеллиуса, из которого получаем

$$\alpha = \frac{n_1}{n_2}, \quad \beta = \frac{n_1}{n_2} \frac{\cos\theta_0}{\sqrt{1-(n_1^2/n_2^2)\sin^2\theta_0}}.$$

Для удобства дальнейших расчетов полином Эрмита запишем в явном виде:

$$H_m\left(\frac{w_0\chi}{\sqrt{2}}\right) = m! \sum_{r=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^r (\sqrt{2}\,w_0)^{m-2r}}{r!\,(m-2r)!} \chi^{m-2r}. \tag{6}$$

Подставляя (2), (4)—(6) в (3) и проводя вычисления, получаем полное поле в области отклика:

$$\psi_1 = \frac{m!\,n!(\sqrt{2})^{m+n}}{\xi_x^{m+1}\xi_y^{n+1}} \exp\{-jk_1z_1\} \times$$

$$\times \sum_{pqrs} \frac{(-j)^{p+q}\xi_x^{2r}\xi_y^{2s} t_{pq}}{r!\,s!\,(m-2r)!\,(n-2s)!\,2^{r+s} w_0^{p+q} k^{p+q} \xi_x^p \xi_y^q} \times$$

$$\times H_{p+m-2r}\left(\frac{\alpha x_1}{\xi_x w_0}\right) H_{q+n-2s}\left(\frac{\beta y_1}{\xi_y w_0}\right) \exp\left\{-\frac{1}{w_0^2}\left(\frac{\alpha^2 x_1^2}{\xi_x^2} + \frac{\beta^2 y_1^2}{\xi_1^2}\right)\right\},$$

где $p \in [0, \infty)$, $q \in [0, \infty)$, $r \in \left[0, \left[\frac{m}{2}\right]\right]$, $s \in \left[0, \left[\frac{n}{2}\right]\right]$,

$$\xi_x^2 \equiv 1 - i\alpha^2 \frac{\lambda_1 z_1}{\pi w_0^2}, \quad \xi_y^2 \equiv 1 - j\beta^2 \frac{\lambda_1 z_1}{\pi w_0^2}.$$

Рассчитаем T_{mn} — коэффициент передачи мощности телом $\mathcal{K}$. Мощность падающей волны:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx dy = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z m! \, n! \, 2^{m+n-1} \pi w_0^2,$$

здесь Z — импеданс среды перед телом.

Для прошедшей волны имеем

$$P_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_1 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_1|^2 \, dx_1 dy_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_1 \frac{(m! \, n!)^2 \, 2^{m+n}}{|\xi_x|^{2(m+1)} \, |\xi_y|^{2(n+1)}} \times$$

$$\times \sum_{pqrsp'q'r's'} \frac{(-j)^{p+q-p'-q'} \, \xi_x^{2r} \xi_x^{*2r'} \xi_y^{2s} \xi_y^{*2s'}}{r! \, s! \, (m-2r)! \, (n-2s)! \, r'! \, s'! \, (m-2r')! \, (n-2s')! \, 2^{r+s+r'+s'} \xi_x^p \xi_x^{*p'} \xi_y^q \xi_y^{*q'}} \times$$

$$\times \frac{t_{pq} t^*_{p'q'}}{(kw_0)^{p+q+p'+q'}} \operatorname{Int}_x \operatorname{Int}_y,$$

где

$$\operatorname{Int}_x \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{p+m-2r}\left(\frac{\alpha x_1}{\xi_x w_0}\right) H_{p'+m-2r'}\left(\frac{\alpha x_1}{\xi_x^* w_0}\right) \exp\left\{-\frac{2\alpha^2 x_1^2}{|\xi_x|^4 \, w_0^2}\right\} dx_1 =$$

$$= \delta_{\gamma\gamma'} (p+m-2r)! \, (p'+m-2r')! \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, \frac{|\xi_x|^2 \, w_0}{\alpha} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\min(M, M')} \frac{\left(\frac{1}{2}\xi_x^{*2} - 1\right)^{M-k} \left(\frac{1}{2}\xi_x^2 - 1\right)^{M'-k} |\xi_x|^{4k+2\gamma}}{(M-k)! \, (M'-k)! \, (2k+\gamma)!},$$

$$M \equiv \left[\frac{p+m-2r}{2}\right], \quad M' \equiv \left[\frac{p'+m-2r'}{2}\right], \quad \gamma \equiv p+m-2r-2M,$$

$$\gamma' \equiv p'+m-2r'-2M',$$

$\delta_{\gamma\gamma'}$ — символ Кронекера, Z_1 — импеданс в области отклика. Интеграл Int_y имеет аналогичный вид.

В итоге получаем искомое выражение

$$T_{mn} = A_{mn} \sum_{pqp'q'} B\begin{pmatrix} mn \\ pqp'q' \end{pmatrix} \frac{t_{pq} t^*_{p'q'}}{(kw_0)^{p+q+p'+q'}}, \tag{7}$$

где

$$A_{mn} \equiv \frac{\operatorname{Re} Z_1}{\operatorname{Re} Z} \, \frac{m! \, n!}{|\xi_k|^{2m} |\xi_y|^{2n} \alpha\beta}, \tag{8}$$

$$B\begin{pmatrix} mn \\ pqp'q' \end{pmatrix} = \frac{(-j)^{p+q-p'-q'}}{\xi_x^p \xi_x^{*p'} \xi_y^q \xi_y^{*q'}} \times$$

$$\times \sum_{r,r',s,s'=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right]} C\begin{pmatrix} mn \\ pqp'q' \\ rsr's' \end{pmatrix} 2^{\frac{\delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\rho\rho'}}{r+s+r'+s'}} \times$$

$$\times \frac{(p+m-2r)!\,(p'+m-2r')!\,(q+n-2s)!\,(q'+n-2s')!}{(m-2r)!\,(n-2s)!\,(m-2r')!\,(n-2s')!} \times$$

$$\times |\xi_x|^{2\gamma} |\xi_y|^{2\rho} \xi_x^{2r} \xi_x^{*2r'} \xi_y^{2s} \xi_y^{*2s'} \left(\frac{1}{2}\xi_x^{*2} - 1\right)^M \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\xi_x^2 - 1\right)^{M'} \left(\frac{1}{2}\xi_y^{*2} - 1\right)^N \left(\frac{1}{2}\xi_y^2 - 1\right)^{N'}, \qquad (9)$$

$$C\begin{pmatrix} mn \\ pqp'q' \\ rsr's' \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{\min(M,M'),\min(N,N')} \frac{2^{2k+2l}}{(M-k)!\,(M'-k)!\,(2k+\gamma)!\,(N-l)!\,(N'-l)!\,(2l+\rho)!},$$

$$N = \left[\frac{q+n-2s}{2}\right],\ N' = \left[\frac{q'+n-2s'}{2}\right],$$

$$\rho = q+n-2s-2N,\ \rho' = q'+n-2s'-2N'.$$

Таким образом, мы представили энергетический коэффициент передачи плоскосохраняющего тела $\mathscr{K}$ в виде квадратичной формы от пространственных производных соответствующего амплитудного плосковолнового коэффициента, причем слагаемые формы быстро убывают с ростом индекса суммирования, поскольку $kw_0 \gg 1$ практически при любой фокусировке пучка. Быстрая сходимость ряда (7) позволяет в конкретных расчетах вместо представления t бесконечным рядом (5) ограничиться N-струей с двумя-тремя слагаемыми.

Заметим, что полученная квадратичная форма T_{mn} является эрмитовской, поскольку $B\begin{pmatrix} mn \\ pqp'q' \end{pmatrix} = B^*\begin{pmatrix} mn \\ p'q'pq \end{pmatrix}$, поэтому T_{mn} действительная величина. Эрмитовость формы (7) в принципе позволяет привести ее к диагональному виду и сократить количество слагаемых в сумме.

Для основной моды и одинаковых сред на входе и выходе ($Z_1 = Z$, $\alpha=\beta=1$, $m=n=0$) выражения (8), (9) упрощаются: $A_{00}=1$,

$$B\begin{pmatrix} 00 \\ pqp'q' \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 00 \\ pqp'q' \\ 0000 \end{pmatrix} \delta_{\gamma\gamma'}\delta_{\rho\rho'} \frac{(-j)^{p+q-p'-q'}}{\xi^{p+q}\xi^{*p'+q'}} |\xi|^{2\gamma+2\rho} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\xi^{*2} - 1\right)^{M+N} \left(\frac{1}{2}\xi^2 - 1\right)^{M'+N'},$$

где $\xi \equiv \xi_x|_{\alpha=1} = \xi_y|_{\beta=1}$.

Рассмотрим предел $w_0 \to \infty$: $\xi \to 1$, в сумме (7) остается только член с $B\begin{pmatrix} 00 \\ 0000 \end{pmatrix} = 1$, т. е.

$$\lim_{w_0 \to \infty} T_{00} = |t(\theta_0)|^2,$$

как и должно быть. Представление (7) позволяет получить критерий плосковолнового приближения для основной моды:

$$B\begin{pmatrix} 00 \\ pqpq \end{pmatrix} \frac{|t_{pq}(\theta_0)|^2}{(kw_0)^{2p+2q}} \ll |t(\theta_0)|^2,$$

здесь p, q — наименьшие индексы, для которых p, q-угловая производная от плосковолнового коэффициента передачи отлична от нуля.

В другом предельном случае, когда проницаемость всех слоев тела $\mathscr{K}$ стремится к единице, производные $t_{pq} = \delta_{0p}\delta_{0q}$, $\alpha = \beta = 1$, получаем $T_{00} = 1$.

Полученное представление коэффициента передачи гауссовской волны в виде быстросходящейся квадратичной эрмитовской формы может быть эффективно использовано для исследования параксиальных характеристик электродинамических структур на основе известных плосковолновых параметров как в аналитических расчетах и оценках, так и в численном моделировании и синтезировании различных слоистых устройств.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kogelnik H., Li T.//Appl. Opt. 1966. 5, N 10. P. 1550. [2] Ooya T., Tateiba M., Fukumitsu O.//J. Opt. Soc. Am. 1975. 65, N 5. P. 537. [3] Алексеев Ю. К., Пирогов Ю. А.//ЖТФ. 1983. 53, № 4. С. 616. [4] Алексеев Ю. К., Костиенко А. И.//Тез. докл. Всесоюз. науч. семинара «Методы синтеза и применение многослойных интерференционных систем». М., 1984. С. 147.

Поступила в редакцию
18.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 3

ОПТИКА И СПЕКТРОСКОПИЯ

УДК 535.42

О ВОЗМОЖНОСТИ СИЛЬНОЙ КОМПРЕССИИ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА В ЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДИСПЕРСИОННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Ю. Е. Дьяков

(кафедра общей физики и волновых процессов)

Предлагается общий метод получения сильного сжатия импульсов при любом виде зависимости волнового числа k(ω) от частоты ω. Подробно рассматривается сжатие супергауссовского импульса в среде с дисперсией n-го порядка.

1. При распространении импульса электрического поля E в линейной диспергирующей среде или системе его длительность меняется, $\Delta\tau = \Delta\tau(z)$. На больших расстояниях ($z \gg L_d$) наступает режим монотонного расплывания импульса, когда

$$\Delta\tau(z)/\Delta\tau(0) \approx z/L_d \tag{1}$$