

УДК 539.123

**СХЕМА УЧЕТА ПОПРАВОК СТАРШЕГО ПОРЯДКА В КХД**

Д. А. Славнов

*(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)*

Получена формула для полного сечения, позволяющая учитывать поправки третьего порядка по  $\alpha_s$  без вычисления петлевых диаграмм и интегрирования по области малых значений импульсов.

В квантовой хромодинамике существует вполне регулярный метод теории возмущений по степеням бегущей константы связи, и, казалось бы, учет старших порядков представляет чисто техническую задачу. Примером блестящего решения такой задачи может служить статья [1], в которой рассчитано полное сечение рождения тяжелых кварков в адрон-адронных столкновениях вплоть до третьего порядка по константе связи  $\alpha_s$ , причем вклад старшего порядка оказывается весьма существенным, а при больших энергиях даже преобладающим.

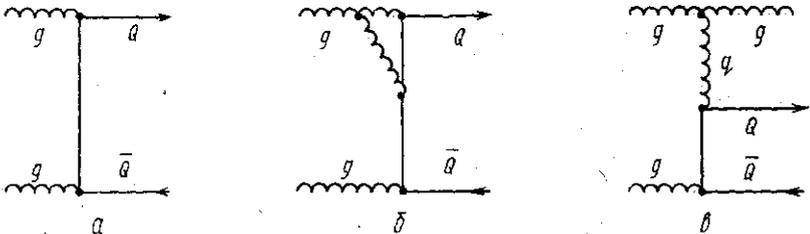
Однако адекватность прямого пертурбативного метода в физике кварк-глюонного взаимодействия может вызвать сомнение. Дело в том, что начиная с третьего порядка по  $\alpha_s$  надо учитывать петлевые диаграммы Фейнмана. Во-первых, эти диаграммы требуют перенормировок. В принципе от выбора схемы перенормировок наблюдаемые величины зависеть не должны. Однако в КХД при учете только первых порядков теории возмущений эта зависимость может быть весьма существенной. Во-вторых, в таких диаграммах приходится интегрировать по всем значениям петлевого импульса. В результате в них будут вершины, в которых все массы и квадраты импульсов малы по абсолютной величине, а поэтому бегущая константа связи велика и применимость теории возмущений становится весьма проблематичной.

В настоящей статье мы хотим предложить схему учета третьего порядка по  $\alpha_s$ , свободную от указанных недостатков, так как в ней фигурируют только древесные диаграммы. Хотя выведенная нами формула носит общий характер, для придания ей большей наглядности мы получим ее на примере конкретного процесса, рассмотренного в статье [1]. Там вычисляется полное сечение  $\sigma(S)$  рождения тяжелых кварков в столкновении адронов  $A$  и  $B$ . Это сечение выражается через сечения  $\sigma_{ij}$  инклюзивных подпроцессов рождения тяжелых кварков при столкновении партонов  $i$  и  $j$ :

$$\sigma(S) = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 \hat{\sigma}_{ij}(x_1 x_2 S, \mu) F_i^A(x_1, \mu) F_j^B(x_2, \mu), \tag{1}$$

$F_i^A(F_j^B)$  — функция распределения партонов  $i(j)$  в адроне  $A(B)$ ,  $\mu$  — параметр факторизации, отделяющий малые импульсы от больших.

Из всех возможных подпроцессов рассмотрим какой-нибудь один, например глюон-глюонное столкновение. Реально именно этот подпроцесс дает основной вклад в полный процесс рождения тяжелых кварков. Характерные диаграммы Фейнмана, которые надо учитывать при расчете этого подпроцесса, изображены на рисунке.



Диаграммы, соответствующие различным подпроцессам:  $a$  — диаграмма низшего порядка;  $b$  — поправка к подпроцессу ( $a$ ) за счет испускания виртуального глюона;  $v$  — поправка к подпроцессу ( $a$ ) за счет испускания реального глюона

Расчет по теории возмущений для  $\widehat{\sigma}_{gg}$  дает следующий результат:

$$\widehat{\sigma}_{gg}(\widehat{S}, \lambda) = \frac{\alpha_S^2(\lambda)}{m^2} \left\{ f_0(\widehat{S}) + \alpha_S(\lambda) \left[ f_1(\widehat{S}) + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} f_1(\widehat{S}) \right] \right\}. \quad (2)$$

Здесь  $\widehat{S} = x_1 x_2 S$ ;  $m$  — масса тяжелого кварка;  $\lambda$  — массовый параметр перенормировки, который в работе [1] принимается равным параметру факторизации  $\mu$ ;  $f_0$  учитывает вклад квадрата диаграмм типа (а),  $f_1$  учитывает интерференцию диаграмм типа (а) и (б), а также квадрат диаграмм типа (в),  $\bar{f}_1$  вычисляется из ренормгрупповых соотношений так, чтобы скомпенсировать зависимость полного сечения от параметра перенормировки  $\lambda$ . Функция  $\bar{f}_1$  выражается через диаграммы типа (а) и ядра Альтерелли—Паризи [2] низшего порядка.

В работе [1] получены конкретные выражения для функций  $f_0$ ,  $f_1$  и  $\bar{f}_1$ . При этом  $f_0$  и  $\bar{f}_1$  выражаются только через древесные диаграммы, и полученные для них результаты вполне однозначны и каких-либо возражений не вызывают. Кстати, сами вычисления весьма несложны. В противоположность этому результат, полученный для  $f_1$ , вызывает большие сомнения, обусловленные неоднозначностью в выборе схемы перенормировок в диаграммах типа (б) и необходимостью интегрировать по такой области импульсов, в которой бегущая константа связи в трехглюонных вершинах в диаграммах типа (б) и (в) должна быть большой. В связи с этим постараямся найти  $\bar{f}_1$  не прямым вычислением по теории возмущений, а обходным путем.

Примем анзат:  $\widehat{\sigma}_{gg}$  можно представить в виде

$$\widehat{\sigma}_{gg}(\widehat{S}, \lambda) = \widehat{\sigma}_1(\widehat{S}, \lambda, \mu) + \widehat{\sigma}_2(\widehat{S}, \lambda, \mu), \quad (3)$$

где

$$\widehat{\sigma}_1(\widehat{S}, \lambda, \mu) = \frac{\alpha_S^2(\lambda)}{m^2} [f_0(\widehat{S}) + \alpha_S(\lambda) g_1(\widehat{S}, \lambda)] \exp \left\{ \alpha_S(\lambda) a(\widehat{S}) \ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} \right\},$$

$$\widehat{\sigma}_2(\widehat{S}, \lambda, \mu) = \frac{\alpha_S^3(\lambda)}{m^2} g_2(\widehat{S}, \mu).$$

Здесь  $\widehat{\sigma}_1$  описывает инклюзивное рождение тяжелых кварков либо без сопровождения, либо с сопровождением мягких и коллинеарных (далее общее название — нежесткие) безмассовых партонов,  $\widehat{\sigma}_2$  описывает рождение тяжелых кварков в сопровождении жестких безмассовых партонов. Параметр  $\mu$  является границей между жесткими и нежесткими партонами. Для конкретного подпроцесса, изображенного на рисунке, в, жесткими партонами можно назвать такие, для которых  $|q^2| > \mu^2$ .

В рамках теории возмущений представление (3) для  $\widehat{\sigma}_{gg}$  получить нетрудно, во всяком случае с точностью до  $\alpha_S^3$ . Но мы примем, что это представление справедливо и вне рамок теории возмущений. Точнее, мы примем, что такое представление справедливо, если нежесткие партоны учитываются вне рамок теории возмущений, а для жестких и массивных партонов применима теория возмущений. Нам достаточно, чтобы представление (3) было справедливо по этой модифицированной теории возмущений до порядка  $\alpha_S^3$ . Для того чтобы учесть более высокие порядки, надо ввести зависимость от  $\alpha_S$  в функции  $g_1$ ,  $g_2$  и  $a$ . Мы этого делать не будем.

Приведенный анзат навеян теоремой Блоха—Нордсика [3] об отсутствии инфракрасных расходимостей в КЭД. Непосредственно эта теорема к КХД не применима, но существуют соответствующие обобщения [4], которые распространяются и на КХД.

Если мы начнем рассчитывать сечение  $\widehat{\sigma}_1$  по теории возмущений, то в него дадут вклад, во-первых, квадраты диаграмм типа (а), во-вторых, произведения диаграмм типа (а) на диаграммы типа (б), в-третьих, квадраты диаграмм типа (в) при  $|q^2| < \mu^2$ . Второй и третий вклады по отдельности имеют инфракрасные расходимости, причем второй вклад отрицателен, а третий положителен. В сумме расходимости компенсируются. Поэтому есть надежда, что можно так провести границу между жесткими и нежесткими партонами и так выбрать точку нормировки, что второй и третий вклады полностью компенсируются, включая и конечную часть.

В связи с этим примем второй анзат: существует такое  $\lambda_0$  (возможно, зависящее от  $\widehat{S}$ ), что при  $\mu = \lambda = \lambda_0$

$$\widehat{\sigma}_1(\widehat{S}, \lambda, \mu) = \frac{\alpha_S^2(\lambda_0)}{m^2} f_0(\widehat{S}). \quad (4)$$

Это эквивалентно  $g_1(\widehat{S}, \lambda_0) = 0$ . Отсюда

$$\widehat{\sigma}_{gg}(\widehat{S}, \lambda_0) = \frac{\alpha_S^2(\lambda_0)}{m^2} \left\{ f_0(\widehat{S}) \exp \left\{ \alpha_S(\lambda_0) a(\widehat{S}) \ln \frac{\mu^2}{\lambda_0^2} \right\} + \alpha_S(\lambda_0) g_2(\widehat{S}, \mu) \right\}. \quad (5)$$

Левая часть этого равенства от  $\mu$  не зависит, поэтому, дифференцируя правую часть по  $\ln \mu^2$  и полагая  $\mu = \lambda_0$ , получим

$$a(\widehat{S}) f_0(\widehat{S}) = - \left. \frac{\partial g_2(\widehat{S}, \mu)}{\partial \ln \mu^2} \right|_{\mu=\lambda_0}. \quad (6)$$

Запишем теперь формулу (2) для  $\lambda = \lambda_0$  и найдем из нее  $f_1$ :

$$f_1 = \alpha_S^{-3}(\lambda_0) \widehat{\sigma}_{gg}(\lambda_0) - \alpha_S^{-1}(\lambda_0) f_0 - \bar{f}_1 \ln \frac{\lambda_0^2}{m^2}.$$

Найденное таким образом  $f_1$  подставим обратно в формулу (2), воспользовавшись для  $\widehat{\sigma}(\lambda_0)$  и  $a(\widehat{S})$  формулами (5) и (6).

В результате получим

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{gg}(\widehat{S}, \lambda) = & \frac{\alpha_S^2(\lambda)}{m^2} \left\{ f_0(\widehat{S}) + \alpha_S(\lambda) \left[ g_2(\widehat{S}, \lambda) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \ln \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \bar{f}_1(\widehat{S}) - \ln \frac{\mu^2}{\lambda_0^2} \frac{\partial g_2(\widehat{S}, \lambda_0)}{\partial \ln \lambda_0^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Или, если, как и в работе [1], точку нормировки  $\lambda$  совместить с точкой факторизации  $\mu$ , то

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{gg}(\widehat{S}, \mu) = & \frac{\alpha_S^2(\mu)}{m^2} \left\{ f_0(\widehat{S}) + \alpha_S(\mu) g_2(\widehat{S}, \mu) + \right. \\ & \left. + \alpha_S(\mu) \ln \frac{\mu^2}{\lambda_0^2} \left[ \bar{f}_0(\widehat{S}) - \frac{\partial g_2(\widehat{S}, \lambda_0)}{\partial \ln \lambda_0^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В идеале сечение полного процесса (1) не должно зависеть от  $\mu$ , но реально, конечно, эта зависимость будет, так как учитывается только второй и третий порядок по  $\alpha_S(\mu)$ . Поскольку основной вклад в сечение дают процессы, в которых поперечные импульсы порядка массы рождающихся тяжелых кварков, то можно ожидать, что наилучший результат получится, если точку нормировки  $\mu$  поместить где-то в районе  $m$ . В статье [1] рассматривается область

$$0,5m < \mu < 2m. \quad (7)$$

В этом случае можно ожидать, что вклад от неучитываемых старших порядков будет минимальным.

Избавившись от неопределенностей, связанных с выбором схемы перенормировки (перенормировка просто не нужна), мы, к сожалению, приобрели неопределенность, обусловленную параметром  $\lambda_0$ . Точного значения  $\lambda_0$  мы не знаем, но примерную область его локализации указать можно. Из формулы (4) следует, что вычисленное в низшем порядке теории возмущений эксклюзивное сечение рождения пары тяжелых кварков в действительности соответствует инклюзивному сечению процесса, в котором возможно испускание безмассовых партонов с поперечными импульсами до  $\lambda_0$ . Так как характерный поперечный импульс тяжелых кварков в эксклюзивном процессе порядка их массы  $m$ , то этот процесс экспериментально будет мало отличаться от инклюзивного процесса до тех пор, пока поперечные импульсы испускаемых партонов не будут превосходить  $m$ . Таким образом, можно ожидать, что  $\lambda_0$  также порядка  $m$ .

Во всяком случае мы можем вычислить сечение рождения тяжелых кварков, варьируя значение  $\lambda_0$  в области (7), и принять получающуюся вариацию сечения как теоретическую ошибку метода. Отметим также, что, поскольку в нашем методе исключается область малых поперечных импульсов, то следует ожидать, что неопределенность в значении  $\lambda_0$  в большой мере поглощает неопределенность, связанную с непертурбативными эффектами.

- [1] Nason P., Dawson S., Ellis R. K. //Nucl. Phys. 1988. B303. P. 607.  
 [2] Altarelli G. //Phys. Reports. 1982. 81. P. 1. [3] Bloch F., Nordsieck A. //Phys. Rev. 1937. 52. P. 54; Yennie D. R., Frautschi S. C., Suura H. //Ann. Phys. 1961. 13. P. 379. [4] Kinoshita T. //J. Math. Phys. 1962. 3. P. 650; Lee T. D. Particle Physics and Introduction to Field Theory. Harwood Academic, 1981.

Поступила в редакцию  
06.12.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 3

УДК 519.21

## МЕТОД РИТЦА В ЗАДАЧЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Т. В. Матвеева, Ю. П. Пытьев

(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)

Рассмотрен класс задач интерпретации нелинейных измерений, сводящихся к вычислению значения известной функции по неточно заданному аргументу. Предлагается метод решения задач интерпретации, позволяющий значительно упростить вычислительный процесс и хорошо аппроксимировать решение точной задачи.

Схема измерений подавляющего большинства физических экспериментов описывается равенством

$$\xi = a(f) + v, \quad (1)$$

согласно которому измеряется значение  $a(f)$  известной функции  $a(\cdot)$ , в то время как исследователя, как правило, интересует значение ее аргумента  $f$  или, в более общем случае, значение функции  $U(f)$ , где  $f$  (или  $U(f)$ ) — параметры исследуемого объекта. В равенстве (1)  $\xi$  — результат измерения,  $v$  — погрешность,  $a(\cdot)$  — векторозначная функция,  $f$  — вектор параметров объекта. В качестве примера приведем более подробную запись равенства (1):

$$\xi(t) = \int_Y K(t, y) z(f, y) dy + v(t), \quad t \in T,$$

в которой

$$a(f) = a(f, \cdot) = \int_Y K(\cdot, y) z(f, y) dy,$$

причем интеграл описывает взаимодействие измерительного прибора с объектом и средой,  $t$  — время измерения.

На практике определение параметров объекта чаще всего проводится методом наименьших квадратов (МНК):

$$\|\xi - a(f)\|^2 \sim \min_{f \in \mathcal{F}}$$

где  $\mathcal{F}$  — множество, априори содержащее вектор параметров  $f$ . Если уравнение  $a(f) = a$  имеет единственное решение при любом  $a \in a(\mathcal{F})$ , задача состоит в определении значения функции  $a^{-1}(\cdot)$ , аргумент которой  $a(f)$  согласно равенству (1) известен с ошибкой  $v$ . Ограничимся этим случаем и рассмотрим задачу определения параметров объекта — вектора  $U(f)$  — по неточно измеренному аргументу функции  $U(\cdot)$ :

$$\xi = f + v, \quad (2)$$

т. е. рассмотрим задачу интерпретации измерения (2).