$$\psi_a=\frac{1}{\sqrt{2(1-S_0)}}(\psi_{12}-\psi_{21}),\quad E_a(R)=\frac{Q-\tilde{A}}{1-S_0}. \tag{37}$$

Первое решение симметрично (спины электронов параллельны), второе — антисимметрично (спины электронов антипараллельны). Энергия связи квазимолекулы обнаруживает аномальное поведение: $E_c(R)>E_a(R)$ всегда.

В отсутствие примесей E_c и E_a равны соответственно

$$E_{c,a}=\frac{e^2\sqrt{\pi}}{2a}I_0\left(\frac{R^2}{8}\right)\frac{x^{1/4}\pm x^{3/4}}{1\pm x}, \tag{38}$$

где $x=\exp\{-R^2/2\}$, $0<x<1$. Из (38) видно, что E_c и E_a положительны и $E_c>E_a$ при любых R. Поэтому всегда энергетически выгоднее образование состояния (37) с параллельными спинами электронов. Разумеется, устойчивой связи между волновыми пакетами (29) при $R\gg a$ не возникает.

Если образование большого числа волновых пакетов (29) энергетически выгодно, то минимуму энергии такого состояния должно отвечать определенное упорядочение их расположения. По-видимому, наиболее выгодна двумерная решетка из волновых пакетов, образованная равносторонними треугольниками с волновыми пакетами в их вершинах (такая конфигурация из вихревых нитей возникает в сверхпроводниках [13]). Полная энергия взаимодействия пакетов в решетке при $R\gg a$ равна

$$U=3\gamma E_a(R),$$

где $\gamma=2/(\sqrt{3}R^2)$ — число волновых пакетов на единицу площади.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Laughlin R. B. // Phys. Rev. Lett. 1983. **50**. P. 1395. [2] Laughlin R. B. // Phys. Rev. 1983. **B27**. P. 3383. [3] Chui S. T., Hakim R. J., Ma K. B. // Phys. Rev. 1986. **B33**. P. 7110. [4] Kivelson S., Kallin C., Arovas D. P., Schrieffer J. R. // Phys. Rev. Lett. 1986. **56**. P. 873. [5] Haldane F. D. // Phys. Rev. Lett. 1983. **51**. P. 605. [6] Дункан Ф., Холдейн М. // Квантовый эффект Холла. М., 1989. С. 289. [7] Прендж Р. Е. // Там же. С. 18. [8] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963. [9] Nielsen H. B., Ninomiya M. // Nucl. Phys. 1979. **B156**. P. 1. [10] Prange R. // Phys. Rev. 1981. **B23**. P. 4802. [11] Халилов В. Р. // Измер. техника. 1990. № 2. С. 4. [12] Фейнман Р. Статистическая механика. М., 1975. [13] Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. Ч. 2. М., 1978.

Поступила в редакцию
22.11.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 4

УДК 539.1.01

НУТ-РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Х. Э. Пинсон К. (Колумбия), П. В. Карабут

(кафедра квантовой теории и физики высоких энергий)

Изучается НУТ-решение уравнений релятивистской теории гравитации. Показано, что наличие НУТ-параметра в метрике эффективного риманова пространства приводит к появлению гравитационных полей, имеющих нефизический характер.

Релятивистская теория гравитации (РТГ) [1], построенная на основе пространства-времени Минковского, принципа геометризации и представлений о гравитационном поле как о физическом поле в духе Фарадея—Максвелла, имеет все законы сохранения энергии-импульса и момента импульса. Системы уравнений, описывающих гравитационное поле, в РТГ имеют вид

$$R_n^m - \frac{1}{2}\delta_n^m R = 8\pi T_n^m. \tag{1}$$

$$D_m \tilde{g}^{mn} = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{g}^{mn} = \sqrt{-g}\, g^{mn} = \sqrt{-\gamma}\,(\gamma^{mn} + \Phi^{mn})$, D_m — ковариантная производная по метрике γ_{mn}. Метрика g_{mn} является метрикой эффективного риманова пространства, возникающего из-за наличия гравитационного поля Φ_{mn}. Все величины в выражениях (1), (2) зависят от координат $\{\xi^i\}$ пространства Минковского.

Целью настоящей работы является нахождение внешнего сферически-симметричного решения для тела массы M и НУТ-параметра l в РТГ. Для этого нам необходимо будет построить общее решение системы уравнений (1), (2), затем исследовать вопрос о том, имеет ли это поле физический характер. Некоторые теоретические аспекты поиска точных решений уравнений РТГ, изложенные в [2], в настоящей работе не исследуются.

Для решения поставленной задачи воспользуемся решением НУТ [3] в координатах кривизны:

$$ds^2 = g^{ik}dx^i dx^k = f(r)\,(dT + 4l\sin^2(\theta/2)\,dF)^2 - f(r)\,dr^2 -$$
$$-(r^2+l^2)\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, dF^2), \tag{3}$$
$$f(r) = \rho^{-2}\Delta,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 \equiv g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\Lambda}{\rho\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial T}\right)^2 + \frac{4l\sin(\theta/2)}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial F} -$$
$$-\frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial F}\right)^2, \tag{4}$$

где $\Delta = r^2 - 2Mr - l^2 = (r+r_+)(r-r_-)$, $r_\pm = M \pm \mu$,

$$\rho^2 = r^2 + l^2,\ \mu = (M^2 - l^2)^{1/2},$$

$$\Lambda = \rho^4 - 4l\Delta\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$$

и $\{x^i\} = \{T, r, \theta, F\}$ — координаты кривизны.

Следует отметить, что решение НУТ при $l \neq 0$ не является асимптотически плоским, так как не существует асимптотических координат Минковского. Кроме того, в научной литературе до настоящего времени нет единства мнений по проблеме физической интерпретации параметра l. В частном случае при $l=0$ метрика (3) переходит в решение Шварцшильда [4].

Метрика (3) является решением уравнений Гильберта—Эйнштейна (1) в координатах кривизны. Для построения решения полной системы уравнений РТГ (1)—(2) найдем связь координат $\{x^i\}$ эффективного риманова пространства и координат $\{\xi^i\}$ пространства Минковского.

В качестве координат пространства Минковского выберем галилеевы: $\{\xi^i_G\}=\{t,\ x,\ y,\ z\}$; $\gamma_{ik}(\xi)=\mathrm{diag}(1,\ -1,\ -1,\ -1)$. В этом случае связь координат определяется уравнением

$$\square\,\xi^i=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{-g}\,g^{pq}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^q}\right)=0. \tag{5}$$

Для метрики (3) в координатах кривизны имеем выражение для ковариантного оператора Даламбера:

$$\square=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{-g}\,g^{pq}\frac{\partial}{\partial x^q}\right)=\frac{1}{\rho^2}\left\{\frac{\Lambda}{\Delta}\frac{\partial}{\partial T^2}+\right.$$

$$+\frac{4l\sin(\theta/2)}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial}{\partial F}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial}{\partial r}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial F^2}\right\}. \tag{6}$$

Далее будем использовать методику решения уравнений (5), развитую в работе [5]. Тогда решение данных уравнений будем искать в виде

$$\begin{aligned} t&=T,\\ x&=A\cos\varphi+B\sin\varphi,\\ y&=A\sin\varphi-B\cos\varphi,\\ z&=U, \end{aligned} \tag{7}$$

где A, B, U — функции от r, θ. В этом случае схема разделения переменных дает результат:

$$\begin{aligned} A(r,\ \theta)&=C(r-M)\sin\theta+\sum_{n=0}^{\infty}a_nQ_n(\xi)\,P^1_n(\cos\theta),\\ B(r,\ \theta)&=\sum_{n=0}^{\infty}b_nQ_n(\xi)\,P^1_n(\cos\theta),\\ U(r,\ \theta)&=C(r-M)\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}u_nQ_n(\xi)\,P_n(\cos\theta), \end{aligned} \tag{8}$$

где a_n, b_n, u_n — действительные постоянные, $P_n(\cos\theta)$ — полином Лежандра, $P_n{}^1(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра, $Q_n(\xi)$ — функция Лежандра второго рода, $\xi=-(r-M)/\mu$, $\xi\in[-\infty,\ -1]$, $C\neq1$.

В формулах (8) мы учитываем, что решение НУТ не является асимптотически плоским и поэтому координаты $\{x^i\}$ на бесконечности могут и не совпадать со сферическими координатами пространства Минковского. Анализ этого решения в общем виде представляется достаточно сложным, поскольку требует детального изучения области применимости формул (8). Область существования решения уравнений РТГ в нашем случае определяется требованием взаимной однозначности координатного преобразования (7).

В качестве частного случая рассмотрим решение НУТ, которое удовлетворяет всей системе уравнений РТГ в области $r>r_+$. В работе [5] было показано, что такому требованию удовлетворяет единственное решение, которое получается при координатном переходе от метрики (3), причем это координатное преобразование получается из общих выражений (7), (8) при $a_n=0$, $b_n=0$, $u_n=0$ и записывается следующим образом:

$$R=C(r-M),\ \theta_0=\theta,\ \varphi_0=F,\ t=T, \qquad C\neq 1,\ 0\leqslant\theta_0\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi_0\leqslant 2\pi, \tag{9}$$

где $\{\xi_s^i\}=\{R,\ \theta_0,\ \varphi_0,\ t\}$ — сферические координаты пространства Минковского.

Для этого частного случая проверим условие физичности гравитационного поля. Согласно РТГ [6], гравитационное поле является физическим полем в духе Фарадея—Максвелла. Оно оказывает силовое воздействие на вещество, движущееся в пространстве Минковского, и поэтому физическое гравитационное поле не должно разгонять частицы до скоростей больших, чем скорость света в вакууме. Другими словами, в РТГ существует условие физичности гравитационного поля, которое гласит, что риманов световой конус должен всегда находиться внутри светового конуса пространства Минковского.

Будем исходить из уравнений движения пробных частиц в метрике (3). Это движение можно представить как движение по геодезическим в эффективном искривленном пространстве-времени с метрикой $g_{ik}(x)$:

$$\frac{dx^i}{ds^2}=-\Gamma^i_{pq}\frac{dx^p}{ds}\,\frac{dx^q}{ds}, \tag{10}$$

где $ds^2=g_{pq}(x)dx^p dx^q$, $x^i=\{T,\ r,\ \theta,\ F\}$. Первые интегралы системы (10) находятся стандартно и записываются так:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{ds}&=\frac{1}{\rho^2}\left(\Lambda\,\varepsilon-2l\cos^{-2}\frac{\theta}{2}\,\mathscr{L}\right),\\
\frac{dr}{ds}&=-\frac{1}{\rho^2}\left[\rho^4\varepsilon^2-\Delta\left(\rho^2+K^2\right)\right]^{1/2},\\
\frac{dF}{ds}&=\frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left(4l\sin^2\frac{\theta}{2}\,\varepsilon+\mathscr{L}\right),\\
\frac{d\theta}{ds}&=\frac{\sin\theta}{\rho^2}\left[K^2\sin^2\theta-\left(4l\sin^2\frac{\theta}{2}\,\varepsilon+\mathscr{L}\right)^2\right]^{1/2},
\end{aligned} \tag{11}$$

где ε, $\mathscr{L}$, K — постоянные.

Для исследования условия физичности гравитационного поля исходим из интервала пространства Минковского, который записывается следующим образом:

$$d\sigma^2=dt^2-dR^2-R^2\left(d\theta_0^2+\sin^2\theta_0 d\varphi_0^2\right). \tag{12}$$

Для мировых линий пробных частиц, движущихся по времениподобным геодезическим риманова пространства-времени, $ds^2>0$, а для фотонов $ds^2=0$. На траекториях частиц величина интервала пространства Минковского должна быть неотрицательной: $d\sigma^2\geqslant 0$, а скорость частицы

$$V^2=\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+R^2\left[\left(\frac{d\theta_0}{dt}\right)^2+\sin^2\theta_0\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2\right]\leqslant 1. \tag{13}$$

В дальнейшем нами будет использована методика работы [7]. Тогда, подставляя (11) в (13) и делая замену $J=\mathscr{L}/\varepsilon$,

$$\widetilde{K}=\frac{K}{\varepsilon},\ E=\frac{1}{\varepsilon^2},\ \widetilde{J}=J+4l\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\overline{K}=\frac{\Delta}{\rho^4}(\widetilde{K}^2+\rho^2 E),$$

$$0\leqslant E\leqslant 1,\ 0\leqslant\overline{K}\leqslant 1,\ \widetilde{J}\leqslant|\Delta^{-\frac{1}{2}}\rho^2\sin^2\theta|,$$

получаем следующее уравнение для скорости частицы:

$$V^2=C^2W(r,\ \theta;\ M,\ l,\ E,\ \overline{K},\ \widetilde{J}), \tag{14}$$

где

$$W=\frac{\rho^4[1+(\Delta^{-1}(r-M)^2-1)\,\overline{K}-\rho^2(r-M)^2E]}{(\Delta^{-1}\rho^4-l\cos^{-2}(\theta/2)\,\widetilde{J})^2}. \tag{15}$$

Из (14)—(15) следует, что функция W зависит от нескольких переменных, которые фиксируют траектории частицы. Функция (15) принимает максимальное значение тогда, когда $E=0$, $\overline{K}=1$, $\widetilde{J}=\Delta^{-1/2}\rho^2\sin\theta$ при $\widetilde{J}l>0$, следовательно, максимальное значение функции (15) можно записать в виде

$$W_{max}=\frac{(r-M)^2}{(\rho^2\Delta^{-1/2}-2l\,\mathrm{tg}(\theta/2))^2}.$$

Для этого выражения имеются следующие пределы: 0 при $r\to r_+$ и 1 при $r\to\infty$. Однако видно, что при $l\neq0$ всегда можно указать такую траекторию, которая является решением уравнений движения (10) в области $r>r_+$ и для которой в некоторой точке $(r,\ \theta)$ выполняется соотношение $\rho^2\Delta^{-1/2}-2l\,\mathrm{tg}(\theta/2)=0$. Последнее означает, что скорость частицы (14) в пространстве Минковского независимо от выбора константы C становится бесконечной.

Таким образом, для случая, когда $l\neq0$, всегда можно выбрать такую геодезическую, которой в пространстве Минковского не будет соответствовать времениподобная мировая линия $d\sigma^2<0$. Это обстоятельство говорит о том, что исследуемое гравитационное поле не является физическим.

Авторы выражают благодарность М. А. Мествиришвили, Ю. В. Чугрееву за обсуждение работы и советы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Логунов А. А., Мествиришвили М. А. Основы релятивистской теории гравитации. М., 1989. [2] Власов А. А.//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1989. **30**, № 5. С. 72; 1990. **31**, № 1. С. 86. [3] Newman E. T., Tamburino L., Unti T.//J. Math. Phys. 1963. **4**. P. 915. [4] Schwarzschild K.//Preuss. Akad. Wiss. 1916. P. 189. [5] Карабут П. В., Чугреев Ю. В.//ТМФ. 1989. **79**, № 3. С. 394. [6] Мествиришвили М. А., Чугреев Ю. В.//ТМФ. 1989. **80**, № 2. С. 305. [7] Карабут П. В., Чугреев Ю. В. Препринт НИИЯФ МГУ № 89-40/117. М., 1989.

Поступила в редакцию
10.01.90