

$\approx 0,1$ с. Таким образом, наряду с необратимыми (за времена порядка 5 мин) процессами «фоторазложения» РОВ, которые дают вклад примерно 30% в интенсивность флуоресценции РОВ, существуют и обратимые изменения, доля которых составляет 20%.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чубаров В. В. Определение органических примесей в воде методом лазерной флуориметрии с калибровкой по комбинационному рассеянию света: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1984. [2] Фадеев В. В. Лазерная спектроскопия водных сред: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. М., 1983. [3] Самохина И. А., Тиблюв А. С. // Изв. АН СССР, ФАО. 1989. 25, № 3. С. 221. [4] Самохина И. А. Влияние солнечного излучения в УФ-области спектра на изменение оптических свойств морской воды: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1990. [5] Карабашев Г. С., Тимошевский А. А. // Океанология. 1980. 20, № 1. С. 148.

Поступила в редакцию
22.01.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 4

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.465.552

ПРОФИЛЬ МАСШТАБА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СЛОЕ СМЕШЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ ВДОЛЬ ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Б. И. Самолюбов

(кафедра физики моря и вод суши)

Аналитически исследуется распределение масштаба турбулентности в слое смешения для разработки методов расчета энерго-массообмена на границах течений, распространяющихся вдоль твердых поверхностей. Из системы уравнений Рейнольдса получены распределения скорости, масштаба турбулентности и напряжения трения. Учитывается влияние спутного течения. Профиль пути смешения, найденный аналитически впервые, аналогичен эпюре удвоенного микромасштаба турбулентности. Теоретические распределения согласуются с измеренными.

Выявить закономерности динамики течения и построить его математическую модель можно, располагая распределениями движущих сил, скорости и коэффициента обмена или масштаба турбулентности по глубине и вдоль по потоку. Особенно важно знать профиль этого масштаба (в данном случае «пути смешения») в неоднородных течениях. К классу неоднородных принадлежат потоки с твердой нижней и свободной верхней границами. Такие условия на границах типичны для широко распространенного в природе и технике вида течений жидкостей и газов.

Придонные потоки в океане и приземные в атмосфере [1—3], пристеночные струи в гидро- и аэродинамических сооружениях [4, 5] относятся к указанному типу как по условиям на границах, так и по возможности применения ряда общих методов математического моделирования турбулентного обмена [6—8]. Если известны вертикальные распределения масштаба турбулентности l и скорости U , то для расчета обмена применяется модель «пути смешения» (l -модель) [7, 9—12]. Профили скорости этих течений характеризуются ее уменьшением от мак-

симальной U_m на высоте z_m до значений $U=0$ на нижней ($z=0$) и $U=U_c$ на верхней ($z=z_B$) границах (рис. 1). Заштрихованная область на рис. 1 соответствует слою смешения с вышележащими водами, скорость движения которых равна U_c .

Турбулентный обмен в слое смешения приводит к росту его толщины Δz_m (рис. 1), подъему уровня z_B и примесей, транспортируемых потоком [12, 13]. Оценить дальность распространения такого течения и загрязнение окружающей его среды за счет диффузии примесей можно, применяя в расчетах по l -модели выражение турбулентного напряжения в виде $\tau = \rho l^2 |\partial_z U| |\partial_z U|$ [6, 9]. Изменениями масштаба l с высотой z в слоях смешения потоков жидкостей, однородных по плотности ρ , обычно пренебрегают, принимая его в первом приближении равным $l_0 = k_0 \Delta z_m$, где $k_0 = \text{const}$ [2, 4, 6, 9].

В стратифицированных по плотности ρ течениях для определения l используются аппроксимации зависимостей l от z [10, 11] или выражение $l = l_0 \phi_R$, следующее из уравнения баланса турбулентной энергии [1, 7, 8]. Здесь $\phi_R \ll 1$ — функция, убывающая с ростом устойчивости. Согласно этому выражению для l распределение $l_0(z)$ необходимо при расчете l как в однородных по плотности ρ , так и в стратифицированных течениях. Влияние скорости спутного потока U_c (рис. 1) на величину l_0 до настоящего времени не рассматривалось. Аналитические решения для профилей $l_0(z)$ в слое смешения отсутствуют.

В данной работе распределение $l_0(z)$ получается из системы уравнений Рейнольдса, которая для квазистационарного, плоского течения в приближениях пограничного слоя имеет вид

$$\rho U \partial_x U + \rho W \partial_z U = -\partial_x p + \partial_z \tau + \rho \nu \partial_z^2 U, \quad (1)$$

$$\partial_x U + \partial_z W = 0. \quad (2)$$

Здесь U, W — средние значения продольной и вертикальной компонент скорости, p — давление, ν — молекулярная вязкость. Ось x направлена по течению вдоль подстилающей поверхности, а ордината z — по нормали к ней.

Согласно экспериментальным данным, для распределения скорости течения в слое смешения справедливо приближение подобия [5, 6, 9, 12, 14, 15]. В этом приближении скорость U записывается как $U = U_c + \Delta U_m f(\xi) = \Delta U_m [(1-m)f + m]/(1-m)$, где $\xi = (z - z_m)/\Delta z_m$, $m = U_c/U_m$, f — универсальная функция. Изменения профилей $U(x, \xi)$ вдоль оси распространения течения x при $U_c = \text{const}$ определяются величинами $\Delta U_m(x)$ и $\Delta z_m(x)$.

Из (2) получается выражение вертикальной компоненты скорости

$$W = - \int_{z_m}^z (\partial_x U) dz + W(z_m). \quad \text{Отсюда после замены } z \text{ на } \xi \text{ и } U \text{ на } U_c + \Delta U_m f \text{ при } f(0) = 1 \text{ следует функция}$$

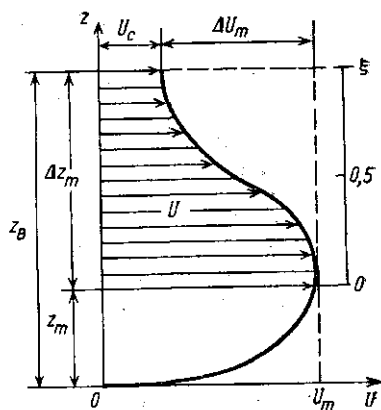


Рис. 1. Вертикальное распределение скорости U (схематично) в толще течения, распространяющегося вдоль твердой поверхности (z и ξ — высоты над уровнями подстилающей поверхности и максимума скорости)

$$W = \Delta U_m \left[\xi f \partial_x \Delta z_m + q_m (1 - f) - (q_u + \partial_x \Delta z_m) \int_0^{\xi} f d\xi \right] + W_0. \quad (3)$$

В (3) $q_u = (\Delta z_m / \Delta U_m) \partial_x \Delta U_m$ — показатель адвективных изменений скорости в ядре течения; $q_m = -\partial_x z_m$, $W_0 = W(z_m)$. Скорость W_0 определяется из (2): $W_0 = -\int_0^{z_m} (\partial_x U) dz$, или

$$W_0 = U_m \partial_x z_m - \bar{f}_b \partial_x (U_m z_m), \quad (3a)$$

где $\bar{f}_b = \int_0^1 f_b d\xi$, $f_b = U/U_m$ при $\xi = 0 \div 1$, $\xi = z/z_m$. Выражение (3a) полу-

чается из (2), если принять, что в функции $f_b = U/U_m$ при $z = 0 \div z_m$ только аргумент $\xi = z/z_m(x)$ зависит от x . По данным измерений в слое $z = 0 \div z_m$ значение \bar{f}_b равно $0,7 \div 0,9$ [4, 5, 8, 11, 13]. Согласно (3a), W_0 при $\partial_x U_m = 0$ составляет

$$W_0 = U_m (1 - \bar{f}_b) \partial_x z_m \cong -(0,1 \div 0,3) q_m U_m.$$

Выражения градиентов $\partial_x U$, $\partial_z U$, $\partial_x \xi$, $\partial_x \Delta z_m$ имеют вид

$$\partial_x U = (\Delta U_m / \Delta z_m) q_u f + \Delta U_m f' \partial_x \xi, \quad \partial_z U = (\Delta U_m / \Delta z_m) f', \quad (4a)$$

$$\partial_x \xi = (q_m - \xi \partial_x \Delta z_m) / \Delta z_m, \quad (4b)$$

$$\partial_x \Delta z_m = C_e (1 - m) / (1 + m), \quad (4b)$$

где $f' = \partial_\xi f$, $C_e = \text{const}$. Методы вывода зависимости (4b), характеризующей рост Δz_m по длине x за счет турбулентного обмена, приведены в работе [15]. В однородных по плотности потоках значение C_e равно $C_{e0} \cong 0,1$ [4, 5]. Для турбулентного течения с пренебрежимо малым влиянием молекулярной вязкости на обмен в слое смешения после подстановки (3) и (4) в (1) получается уравнение движения

$$\rho \left[(q_1 / \partial_x \Delta z_m) - m \xi - q_2 (1 - m) \int_0^{\xi} f d\xi \right] C_{e0} f' / (1 + m) = \\ = -(\Delta z_m / \Delta U_m^2) \partial_x p - \rho q_u (U / \Delta U_m) f - \rho (l_0 f' / \Delta z_m)^2, \quad (5)$$

в котором $q_1 = q_m + (W_0 / U_m)$, $q_2 = 1 + (q_u / \partial_x \Delta z_m)$ (вязкое трение не учитывается). Для безнапорного течения с $U_m = \text{const}$, когда $\partial_x p = q_u = 0$, из (5) следует уравнение

$$-(q_1 / \partial_x \Delta z_m) + m \xi + q_2 (1 - m) \int_0^{\xi} f d\xi = 2(1 + m) l_0 (l_0 f') / C_{e0} \Delta z_m^2. \quad (6)$$

Переход от (5) к (6) сопровождается делением (5) на f' . Второе решение $f' = 0$, т. е. $f = \text{const}$, непригодно во всей области $\xi = 0 \div 1$ и не рассматривается в задачах этого типа [6, 9]. Согласно (3a) и условию $q_u = 0$, соотношение $q_1 / \partial_x \Delta z_m$ в (6) пропорционально величине $q_m / \partial_x \Delta z_m$, которая на основании экспериментальных данных обычно принимается постоянной [5, 15].

По мере сближения скоростей U_c и U_m (см. рис. 1), когда $m \rightarrow 1$, течение в слое смешения становится все более однородным. Если вертикальная структура потока однородна, то масштаб турбулентности l_0

не меняется с глубиной. Поэтому уравнение (6) при $m \rightarrow 1$ замыкается с условием $l_0 = l_{c0} = \text{const}$. Третье слагаемое слева в (6) стремится к нулю, когда $m \rightarrow 1$. В итоге при $m \rightarrow 1$, когда $l_0 = l_{c0}$, из (6) получается уравнение вида

$$-k_1 + k_2 \xi = \Phi f'' \quad (7)$$

где $k_1 = q_1 / \partial_x \Delta z_m$, $k_2 = m$, $\Phi = 2(1+m)l_{c0}^2 / C_{e0} \Delta z_m^2$. Интегрирование (7) с граничными условиями

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f(1) = 0, f'(1) = 0 \quad (8)$$

дает распределение

$$f = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (9)$$

и соотношения параметров исходного уравнения:

$$k_1 = 6\Phi, k_2 = 2k_1 \quad (9a)$$

Профиль (9) приведен на рис. 2, а.

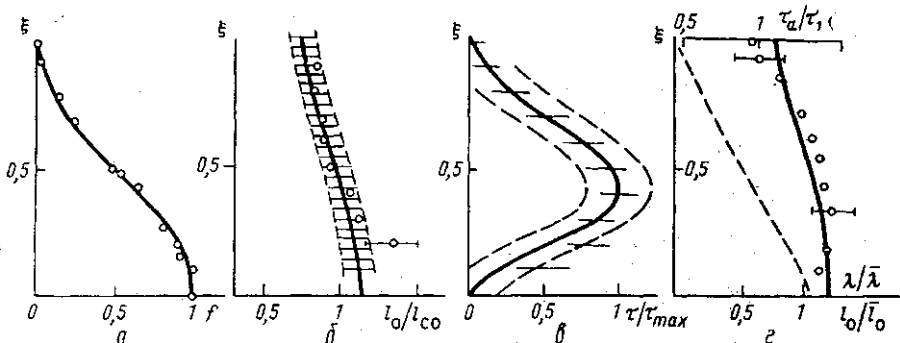


Рис. 2. Измеренные (точки) и теоретические профили скорости $f = \Delta U / \Delta U_m$ (а), пути смещения l_0 / l_{c0} (б), турбулентного напряжения τ / τ_{\max} (в), функции τ_a / τ_1 , масштаба l_0 / l_{c0} и микромасштаба турбулентности $\lambda / \bar{\lambda}$ (г). На рис. 2, б заштрихована область среднеквадратичного отклонения от теоретической кривой при $\xi > 0,2$

Располагая функцией $f(\xi)$ (9), можно, в приближении подобия профилей скорости независимо от значений m , получить из (6) распределение $l_0(\xi)$ при $m = 0 \div 1$. Дальнейшее решение (6) относительно l_0 распространяется не только на режим с $q_u = \partial_x p = 0$. Условие универсальности эпюры f (9) позволяет учесть случаи с любыми значениями q_u ($|q_u| \geq 0$) в течениях с градиентом давления $\partial_x p$, равным $-\rho f U \partial_x \Delta U_m$. При уменьшении интенсивности вертикального обмена, когда $\partial_x f = f' \partial_x \xi \rightarrow 0$, это выражение $\partial_x p$ становится аналогичным градиенту давления в потенциальном течении $-0,5 \rho \partial_x U^2$ [6] (при $U_c = \text{const}$). Если $\partial_x p = -\rho f U \partial_x U_m$, то уравнение (5) независимо от значения q_u переходит в (6).

Для получения профиля пути смещения масштаб l_0 в (6) выражается в виде суммы постоянной l_{c0} и переменной $\bar{l}_0(\xi)$ составляющих, т. е. $l_0 = l_{c0} + \bar{l}_0(\xi)$. Третье слагаемое слева в (6) с f из (9) заменяется суммой линейной и нелинейной компонент:

$$q_2(1-m) \int_0^{\xi} f d\xi = q_2(1-m) [(0,5 + \delta_1)\xi + 0,1] + q_2(1-m) [(0,5 - \delta_1)\xi - \xi^3 + 0,5\xi^4 - 0,1].$$

Значение коэффициента δ_1 , входящего в эту сумму, будет определено при анализе решения. После указанных преобразований уравнение (6) приводится к виду

$$\begin{aligned} & -(q_1/\partial_x \Delta z_m) + m\xi + q_2(1-m) [(0,5 + \delta_1)\xi + 0,1] + q_2(1-m) \times \\ & \times [(0,5 - \delta_1)\xi - \xi^3 + 0,5\xi^4 - 0,1] = \Phi f'' + \Phi [(\tilde{l}_0 \tilde{l}_0 f' / l_{c0}^2) + \\ & + (\tilde{l}_0^2 f' / l_{c0}) - (\tilde{l}_0^2 f'' / l_{c0}^2) + (2\tilde{l}_0 f'' / l_{c0})]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из уравнения (10) получается профиль $f(\xi)$ (9), соответствующий приближению подобия независимо от соотношения скоростей m , если левая часть (10) линейна относительно ξ , а правая равна $\Phi f''$. Это возможно, если функция \tilde{l}_0/l_{c0} удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} q_2(1-m) [(0,5 - \delta_1)\xi - \xi^3 + 0,5\xi^4 - 0,1] = \Phi [(\tilde{l}_0 \tilde{l}_0 f' / l_{c0}^2) + (\tilde{l}_0 f' / l_{c0}) + \\ + (\tilde{l}_0^2 f'' / l_{c0}^2) + (2\tilde{l}_0 f'' / l_{c0})], \end{aligned} \quad (11)$$

которое представляет собой квадратуемый вариант уравнения Абеля второго рода. Граничное условие для \tilde{l}_0/l_{c0} следует из (11) при $f'(0) = 0$ и $f''(0) = -6$ по (9) в форме

$$(\tilde{l}_0/l_{c0})|_{\xi=0} = [1 + 0,0166(1-m)q_2\Phi^{-1}]^{1/2} - 1.$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{l}_0/l_{c0} = \{ [1,66 \cdot 10^{-2} q_2(1-m)/\Phi] [1 - 1,71\xi - 2,14\xi^3 + 1,43\xi^5 - \\ - (0,29 - 6,67\delta_1)\xi(1-\xi)^{-1}] + 1 \}^{1/2} - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Это выражение действительно и конечно во всей области $\xi=0 \div 1$, если отсутствует слагаемое с коэффициентом $0,29 - 6,67\delta_1$, т. е. при $\delta_1 = 0,044$.

Из (10) с распределением \tilde{l}_0/l_{c0} (12) и константой δ_1 , равной 0,044, получается уравнение типа (7) с коэффициентами $k_1 = (q_1/\partial_x \Delta z_m) - 0,1q_2(1-m)$ и $k_2 = m + (0,5 + \delta_1)q_2(1-m)$. Этому уравнению с граничными условиями (8) удовлетворяют решение (9) и соответствующие соотношениям (9а) параметры

$$\Phi = 0,038 [(1,2 + m) + 1,2(q_2 - 1)(1 - m)], \quad (13a)$$

$$q_m = [0,5m + 0,37q_2(1 - m)] \partial_x \Delta z_m - (W_0/U_m). \quad (13б)$$

Выражения (13а, б) позволяют найти масштаб $l_{c0} = [C_{e0}\Phi/2(1+m)]^{1/2}$ и градиент уровня максимума скорости $\partial_x z_m = -q_m$ по заданным значениям m , C_{e0} , $q_u = \Delta z_m(\partial_x U_m)/\Delta U_m$ и W_0/U_m с учетом (3а), (4а) при $q_2 = 1 + (q_u/\partial_x \Delta z_m)$.

По (13б) максимум скорости на профиле (см. рис. 1) приближается ко дну с ростом $\partial_x U_m$ в ускоряющемся течении, когда $q_u > 0$, $W_0/U_m \ll \ll q_m = -\partial_x z_m > 0$. Аналогичный процесс имеет место, если $\partial_x U_m = 0$, $q_u = 0$ и $W_0/U_m \ll q_m$. При этом $q_m \cong (0,37 + 0,13m)\partial_x \Delta z_m$. Увеличение z_m с расстоянием x характерно для затухающего течения ($\partial_x U_m < 0$, $q_u < 0$), что согласуется с данными измерений [5, 6, 15]. Более подробный

анализ отмеченных особенностей развития течения, связанных с влиянием на его динамику градиента давления $\partial_x p$ и шероховатости дна, требует отдельного рассмотрения для конкретных условий.

При известных значениях Φ и δ_1 путь смещения $l_0 = l_{c0} + \bar{l}_0$ из (12) определяется выражением

$$l_0 = l_{c0} \{ [1,66 \cdot 10^{-2} q_2 (1-m)/\Phi] (1 - 1,71\xi - 2,14\xi^2 + 1,43\xi^3) + 1 \}^{1/2}, \quad (14)$$

где $l_{c0} = l_0(\xi_c)$, $\xi_c = 0,43$. Профиль l_0/l_{c0} с $m=0,1$ показан на рис. 2, б.

Распределение пути смещения (14) и профиль скорости (9) удовлетворяют уравнению (5) с граничными условиями (8) при $\partial_x p = -\rho f U \partial_x U_m$ и, в частности, если $\partial_x p = q_u = 0$. Сходная с (14) при $m=0$, но линейная аппроксимация эпюры l предложена для стратифицированного потока в работе [11]. Теоретические профили f , l_0/l_{c0} и $\tau/\tau_{\max} = -\rho l_0^2 |\partial_z U| \partial_z U / \tau_{\max}$ сопоставлены на рис. 2, а, б, в с результатами измерений из работы [5]. Измерения выполнены в пристеночной струе на расстоянии $x=275(z_B|_{x=0})$ от начального створа при $\partial_x p = 0$. Число Рейнольдса составляло $Re_\Delta = \Delta U_m \Delta z_m / \nu \cong 10^4$. Параметры $\tau(\xi_c)$ и m были равны $10^{-2} \rho \Delta U_m^2$ и 0,1. Проверенное в [5] решение Толмина согласуется с $f(\xi)$ (9) при $\xi \leq 0,8$.

Градиент скорости при расчете l_0 определялся как $\partial_z U = \Delta U_m f' / \Delta z_m$ с f' из (9). Среднеквадратичные отклонения зарегистрированных значений f и l_0/l_{c0} от расчетных составляют 10% (пунктир на рис. 2, б) при $q_2=1$ в (14). Для величины l_{c0} с Φ из (13а) при $q_2=1$ и $C_{e0}=0,12$ (по [5]) получается значение $5,5 \cdot 10^{-2} \Delta z_m$, близкое к реальному $(-\tau/\rho)^{1/2} / |\partial_z U|$, составляющему $6,4 \cdot 10^{-2} \Delta z_m$.

Стандартное отклонение от теоретической кривой на рис. 2, в (пунктир) равно 0,2 в слое $\xi=0 \div 1$ и 0,12 при $\xi > 0,3$. Черточками показаны диапазоны измеренных значений τ/τ_{\max} с учетом их разброса.

Расхождение с теорией на рис. 2, б, в, максимальное при $\xi < 0,3$, может быть связано с ошибками измерений и с отмеченным в [5] смещением уровня $z|_{\tau=0}$ вниз относительно горизонта z_m .

Обнаруженный эффект убывания масштаба турбулентности l_0 с высотой при уменьшении $m = U_c / U_m$ в (14) приводит к существенным изменениям напряжения трения $\tau(\xi)$. Пунктиром на рис. 2, г показан профиль функции $\tau_a/\tau_1 = \tau|_{m=0}/\tau|_{m \rightarrow 1} \cong (l_0/l_{c0})^2|_{m=0}$, значение которой при $\xi=0,1 \div 0,9$ составляет $1,3 \div 0,5$. Здесь $\tau|_{m \rightarrow 1} = \rho l_{c0}^2 |\partial_z U| \partial_z U$.

На рис. 2, г сопоставлены нормированные на \bar{l}_0 и $\bar{\lambda}$ профили l_0 и продольного микромасштаба турбулентности λ . Здесь \bar{l}_0 и $\bar{\lambda}$ — осредненные по Δz_m -слою значения l_0 и λ . Эпюра $\lambda(\xi)$ получена в работе [5] с применением специальных методов профильных измерений. Микромасштаб λ соответствует вихреобразованиям, средним между основными энергонесущими и мельчайшими вихреобразованиями колмогоровского масштаба [2, 4]. Стандартное отклонение эпюр l_0/\bar{l}_0 и $\lambda/\bar{\lambda}$ равно 16%, $\bar{\lambda} = 3 \cdot 10^{-2} \Delta z_m$ и $\bar{l}_0 \cong 2\bar{\lambda}$.

Закключение

Впервые получено аналитически вертикальное распределение масштаба турбулентности в слое смещения при наличии спутного течения. Установлено, что путь смещения уменьшается с удалением от ядра течения и в пределах 16%-го отклонения соответствует удвоенному продольному микромасштабу турбулентности.

- [1] Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988. [2] Фрост У., Моулден Т. Турбулентность. М., 1980. [3] Войтов В. И., Соловьев А. В., Ястребов В. С. // Океанология. 1989. 29, № 6. С. 885. [4] Рейнольдс А. Турбулентные течения. М., 1979. [5] Круга V., Eskinazi S. // J. Fluid Mech. 1964. 20, N 4. P. 555. [6] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1973. [7] Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л., 1982. [8] Анисимова Е. П., Сперанская А. А. // Изв. АН СССР, ФАО. 1978. 24, № 10. С. 1110. [9] Дюрэнд В. Ф. Аэродинамика. М., 1939. Т. 3. [10] Анучин В. Н., Белокопытов В. М., Гриценко В. А. // Океанология. 1985. 25, № 3. С. 420. [11] Chikita K. // Water Resour. Res. 1989. 25, N 2. P. 251. [12] Самолюбов Б. И. // Тр. III Всесоюз. конф. «Вихри и турбулентность в океане». Калининград, 1990. С. 97. [13] Пыркий Ю. Г., Самолюбов Б. И. // Океанология. 1983. 23, № 1. С. 74. [14] Самолюбов Б. И. // Изв. АН СССР, ФАО. 1988. 24, № 12. С. 1327. [15] Гиневский А. С. Теория турбулентных струй. М., 1969.

Поступила в редакцию
22.01.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 4

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14/17 : 528.21/22

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ НЕБЕСНОГО ТЕЛА ВНУТРЬ ТЕЛА

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

Аналитическое продолжение внешнего потенциала небесного тела произвольной слоистой структуры возможно на определенную конечную глубину, зависящую от дисперсионных характеристик поверхности и плотности тела.

Вопрос о расширении области аналитичности внешнего потенциала притяжения V (т. е. решения уравнения Лапласа $\Delta V=0$) произвольного небесного тела T внутрь тела не решен в общем виде до сих пор, хотя можно привести некоторые конкретные примеры возможности его решения. Так, из известных формул теории притяжения [1] следует, что внешний потенциал однородного шара является функцией, аналитической всюду, кроме центра шара; внешний потенциал однородного вытянутого эллипсоида вращения аналитичен всюду вне отрезка, соединяющего его фокусы, эллипсоида сжатия — всюду вне фокального диска.

Кроме того, путем использования теоремы Коши—Ковалевской о существовании интеграла уравнения в частных производных доказано [2, с. 209], что внешний потенциал тела аналитической структуры и формы может быть продолжен внутрь тела на бесконечно малое расстояние от его поверхности.

Теоретически задачу аналитического продолжения гармонической функции, представляющей собой внешний потенциал V тела, можно было бы решить совершенно строго, определив расположение сингулярностей этой функции V . Но в силу сложности и практической нереализуемости такого решения как на основе аналитических формул (из-за незнания внутреннего строения), так и из измерений (из-за невозможно-