

- [1] Обухов А. М. Турбулентность и динамика атмосферы. Л., 1988. [2] Фрост У., Моулден Т. Турбулентность. М., 1980. [3] Войтов В. И., Соловьев А. В., Ястребов В. С. // Океанология. 1989. 29, № 6. С. 885. [4] Рейнольдс А. Турбулентные течения. М., 1979. [5] Круга V., Eskinazi S. // J. Fluid Mech. 1964. 20, N 4. P. 555. [6] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., 1973. [7] Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л., 1982. [8] Анисимова Е. П., Сперанская А. А. // Изв. АН СССР, ФАО. 1978. 24, № 10. С. 1110. [9] Дюрэнд В. Ф. Аэродинамика. М., 1939. Т. 3. [10] Анучин В. Н., Белокопытов В. М., Гриценко В. А. // Океанология. 1985. 25, № 3. С. 420. [11] Chikita K. // Water Resour. Res. 1989. 25, N 2. P. 251. [12] Самолюбов Б. И. // Тр. III Всесоюз. конф. «Вихри и турбулентность в океане». Калининград, 1990. С. 97. [13] Пыркин Ю. Г., Самолюбов Б. И. // Океанология. 1983. 23, № 1. С. 74. [14] Самолюбов Б. И. // Изв. АН СССР, ФАО. 1988. 24, № 12. С. 1327. [15] Гиневский А. С. Теория турбулентных струй. М., 1969.

Поступила в редакцию
22.01.91

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 4

АСТРОНОМИЯ

УДК 521.14/17 : 528.21/22

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ НЕБЕСНОГО ТЕЛА ВНУТРЬ ТЕЛА

Н. А. Чуйкова

(ГАИШ)

Аналитическое продолжение внешнего потенциала небесного тела произвольной слоистой структуры возможно на определенную конечную глубину, зависящую от дисперсионных характеристик поверхности и плотности тела.

Вопрос о расширении области аналитичности внешнего потенциала притяжения V (т. е. решения уравнения Лапласа $\Delta V=0$) произвольного небесного тела T внутрь тела не решен в общем виде до сих пор, хотя можно привести некоторые конкретные примеры возможности его решения. Так, из известных формул теории притяжения [1] следует, что внешний потенциал однородного шара является функцией, аналитической всюду, кроме центра шара; внешний потенциал однородного вытянутого эллипсоида вращения аналитичен всюду вне отрезка, соединяющего его фокусы, эллипсоида сжатия — всюду вне фокального диска.

Кроме того, путем использования теоремы Коши—Ковалевской о существовании интеграла уравнения в частных производных доказано [2, с. 209], что внешний потенциал тела аналитической структуры и формы может быть продолжен внутрь тела на бесконечно малое расстояние от его поверхности.

Теоретически задачу аналитического продолжения гармонической функции, представляющей собой внешний потенциал V тела, можно было бы решить совершенно строго, определив расположение сингулярностей этой функции V . Но в силу сложности и практической нереализуемости такого решения как на основе аналитических формул (из-за незнания внутреннего строения), так и из измерений (из-за невозможно-

сти точных измерений) мы выбрали другой, более простой и практически осуществимый путь: определить, на какую глубину возможно аналитическое продолжение внешнего потенциала V для тела с заданными структурой плотности и формой поверхности.

Поставленную таким образом задачу можно также переформулировать следующим образом: какой должна быть фигура тела и распределение масс внутри него, чтобы было возможно аналитическое продолжение внешнего потенциала V на заданную глубину внутрь объемлющей все массы тела сферы σ .

В качестве исследуемого решения уравнения Лапласа мы использовали представление потенциала тела в виде разложения по шаровым функциям:

$$V(r, \varphi, \lambda) = f \sum_{n=0}^{\infty} V_n(r, \varphi, \lambda, T), \quad (1)$$

где

$$V_n = \frac{1}{r^{n+1}} C_n(\varphi, \lambda, T),$$

$$\begin{aligned} C_n(\varphi, \lambda, T) &= \int_T (r')^n P_n(\cos \psi) dm = \\ &= \sum_{m=0}^n (S_{nm} \cos m\lambda + D_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \end{aligned}$$

f — гравитационная постоянная, r, φ, λ — сферические координаты точки наблюдения, ψ — угловое расстояние между направлениями на точки наблюдения и интегрирования, r' — радиус точки интегрирования, S_{nm}, D_{nm} — стоксовы постоянные, зависящие от структуры тела T , $\begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} P_{nm}(\sin \varphi) = Y_{nm}(\varphi, \lambda)$ — сферические функции, $(1/r^n) Y_{nm}(\varphi, \lambda)$ — шаровые функции.

Разложение (1) равномерно сходится, как известно [1], во внешней зоне (т. е. в зоне, расположенной вне сферы σ , проходящей через самую удаленную точку $r' = R_{\max}$ тела T).

Для решения поставленной задачи нужно найти условия равномерной сходимости такого разложения во внутренней зоне (т. е. при $r \leq R_{\max}$) и выразить эти условия в виде зависимости нижней границы $\bar{r}$ зоны сходимости от рельефа поверхности тела и его внутреннего строения.

Задача решалась при следующих допущениях.

1. Поверхность тела $R(\varphi, \lambda)$ — звездная поверхность, уравнение которой можно представить в виде сходящегося разложения по сферическим функциям:

$$R(\varphi, \lambda) = R_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^j (A_{jk} \cos k\lambda + B_{jk} \sin k\lambda) P_{jk}(\sin \varphi). \quad (2)$$

2. Приповерхностные слои тела, лежащие вне сферы $\bar{r} = \text{const}$, или однородны (раздел А), или подчиняются некоторым условиям (раздел Б). Внутренние же слои ($r < \bar{r}$) могут иметь произвольное строение, поскольку они не влияют на возможность аналитического продолжения потенциала планеты до сферы $\bar{r} = \text{const}$. Поэтому при выкладках в разделе А мы можем допустить, что все тело однородно.

Таким образом, мы можем свести поставленную задачу к определению максимально возможных амплитуд A_{jk} , B_{jk} гармоник рельефа и определению условий, налагаемых на плотность при $r \geq \bar{r}$, при выполнении которых оценка $V_n(r, \varphi, \lambda, T)$ удовлетворяла бы условиям равномерной сходимости ряда (1) в произвольной точке $a(\bar{r}, \varphi, \lambda)$, лежащей во внутренней зоне.

В этом случае выполнение условий равномерной сходимости степенного ряда (1) всюду на сфере радиуса $\bar{r}$ влечет за собой равномерную сходимость этого ряда всюду вне этой сферы (при $r > \bar{r}$ и тех же C_n), а значит, и аналитичность представления (1) внешнего потенциала всюду при $r > \bar{r}$. Тогда в силу теоремы единственности для разложения аналитической функции в степенной ряд можно гарантировать при $r > \bar{r}$ сходимость ряда (1) вне тела T именно к потенциалу притяжения этого тела, а его производных — к производным потенциала, и сходимость на поверхности тела T ряда (1) и его первых производных (по любому направлению) — к потенциалу притяжения и его первым производным (в силу непрерывности этих функций при пересечении поверхности тела).

В ряде наших работ [3, 4] показано, что если поверхность однородного тела может быть представлена разложением по сферическим функциям с определенным нами законом убывания амплитуд гармоник, то внешний потенциал такого тела, записанный в виде разложения по шаровым функциям, может быть продолжен аналитически вплоть до поверхности тела. Используемую в этих работах методику доказательств можно применить и для решения поставленной нами задачи.

Полученные результаты можно сформулировать следующим образом.

А. Небесное тело однородно при $r \geq \bar{r}$.

Если поверхность небесного тела можно представить единичной зональной гармоникой степени j и амплитуды A_{j0}

$$R(\varphi, \lambda) = R(\varphi) = R_0 + A_{j0} P_{j0}(\sin \varphi) = \bar{r} + \Delta(\varphi),$$

то внешний потенциал такого тела аналитичен вплоть до сферы радиуса $\bar{r}$, расположенной на глубине Δ от объемлющей сферы радиуса $R_{\max}$, при следующем условии:

$$\Delta/\bar{r} \leq 1/(je), \text{ если } \bar{r} = R_{\max} - \Delta \leq R^* = (R_{\max} + R_{\min})/2,$$

или

$$H/\bar{r} \leq 1/(je), \text{ если } \bar{r} = R_{\min} + H \geq R^*, H = R_{\max} - R_{\min} - \Delta.$$

Данное условие равносильно следующему требованию для амплитуды гармоники рельефа:

$$\frac{|A_{j0}|}{R^*} \leq \frac{1}{\beta_j j^{1+\varepsilon}} \left(\frac{\bar{r}}{R^*} \right)^j,$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\ln j}, \quad \beta_j = \begin{cases} 2 & \text{при } j \text{ нечетном,} \\ \leq 1,5 & \text{при } j \text{ четном.} \end{cases}$$

Если поверхность небесного тела представляется разложением по сферическим функциям (2), то внешний потенциал такого тела анали-

тичен вплоть до сферы радиуса $\bar{r}$, если нормированная степенная дисперсия высот рельефа по любому направлению подчиняется условию

$$\left(\frac{\bar{D}_j}{R_{\max}}\right)^2 \leq \frac{2}{(2j+1)} \left(\frac{1}{j^{3+\varepsilon}} \left(\frac{\bar{r}}{R_{\max}}\right)^j\right)^2, \quad (3)$$

где

$$\bar{D}_j^2 = \frac{2}{2j+1} \sum_{k=0}^j (A_{jk}^2 + B_{jk}^2)$$

в случае статистически однородного и изотропного рельефа.

Отсюда следует, что для осуществления сходимости ряда Лапласа и его первых производных на произвольной звездной поверхности $R(\varphi, \lambda)$ планеты достаточно, чтобы были выполнены следующие условия для нормированной степенной дисперсии рельефа:

$$\left(\frac{\bar{D}_j}{R_{\max}}\right)^2 \leq \frac{2}{(2j+1)} \left(\frac{1}{j^{3+\varepsilon}} \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^j\right)^2_{j \rightarrow \infty} \sim \left(\frac{R_{\min}}{R_{\max}}\right)^{2j}, \quad (4)$$

где $R_{\max} = \max R(\varphi, \lambda)$, $R_{\min} = \min R(\varphi, \lambda)$.

Б. Небесное тело неоднородно при $r \gg \bar{r}$.

Прежде чем определять, при каком распределении плотности мы можем аналитически продолжить внешний потенциал такого тела внутрь вплоть до сферы радиуса $\bar{r}$, выскажем несколько общих соображений о теоретической возможности решения такой задачи.

Как известно из теории потенциала [2, с. 293], потенциал простого слоя плотности $\rho(\varphi, \lambda)$, распределенного на сфере радиуса a , во внешнем пространстве (при $r > a$) равен

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{4\pi f \rho_0 a^2}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (5)$$

где A_{nm} , B_{nm} — коэффициенты разложения плотности простого слоя по сферическим функциям:

$$\rho(\varphi, \lambda) = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Ряд (5) будет сходиться и во внутренней полости слоя при $a > r > \bar{r}$, если коэффициенты A_{nm} , B_{nm} удовлетворяют условию

$$(A_{nm}, B_{nm}) \sim (\bar{r}/a)^n. \quad (6)$$

Таким образом, если внутренняя структура тела и его рельеф таковы, что его потенциал притяжения может быть представлен потенциалом простого слоя, распределенного на сфере радиуса a , плотность которого подчиняется условию (6), то аналитическое продолжение внешнего потенциала возможно вплоть до сферы радиуса $\bar{r}$. (Отметим здесь, что условие (6) при $n \rightarrow \infty$ хорошо согласуется с условием (3) при $a = R_{\max}$, полученным для коэффициентов разложения функции поверхности при условии однородности плотности.)

Сначала рассмотрим несколько примеров, позволяющих прояснить задачу, к тому же имеющих и прикладное значение.

а) Внешний потенциал шара радиуса R_0 , состоящего из однородных концентрических слоев, можно аналитически продолжить вплоть до центра. Если же границы раздела плотности внутри шара не сферичны, то задача усложняется.

Разберем сначала случай с единственной внутренней границей $R(\varphi, \lambda)$, разделяющей приповерхностный слой плотности μ_1 и ядро плотности $\mu_2 > \mu_1$. Тогда, представляя внешний потенциал неоднородного шара в виде суммы потенциалов однородного шара R_0 плотности μ_1 и потенциала ядра плотности $\mu_2 - \mu_1$, убеждаемся в том, что его можно продолжить вплоть до сферы радиуса $\bar{r}$, если граница ядра $R(\varphi, \lambda)$ подчиняется условию (3) для нормированных дисперсий, где $R_{\max}$ — максимальный радиус границы.

Такая задача может возникнуть, например, при продолжении внешнего потенциала планеты, окруженной мощной атмосферой, на ее поверхность (например, для Венеры и Юпитера). Конечно, это продолженное значение будет отличаться от истинного на величину, которую легко рассчитать, зная плотность атмосферы.

Если границ раздела плотности несколько или даже счетное множество (т. е. функция $\mu(r)$ является суммируемой на $R_0 > r > 0$), то, очевидно, для сходимости ряда для внешнего потенциала на какой-либо границе раздела необходимо, чтобы она и все вышележащие границы подчинялись условию сходимости (4), где $R_{\min}$ — минимальный радиус рассматриваемой нижней границы раздела, $R_{\max}$ — максимальные радиусы вышележащих границ.

И, наконец, если шар неоднородной плотности можно представить в виде счетной суммы простых сферических слоев Σ_i , плотности которых подчиняются условию (6), то очевидна сходимость внешнего потенциала такого шара всюду при $r > \sup_{\Sigma} (r(\Sigma_i))$.

б) Внешний потенциал сжатого эллипсоида вращения, состоящего из однородных софокусных слоев, можно аналитически продолжить вплоть до фокального диска. Если же границы раздела плотности внутри эллипсоида произвольны, то внешний потенциал эллипсоида можно продолжить лишь до такой границы раздела, которая со всеми вышележащими границами подчиняется условию (4). Таким образом, на поверхности неоднородного эллипсоида ряд для внешнего потенциала будет сходиться именно к потенциалу эллипсоида, если поверхность эллипсоида удовлетворяет условию $(R_{\max}/R_{\min}) < \sqrt{2}$ и границы слоев, выступающих за сферу радиуса $R_{\min}$, подчиняются условию (4), где $R_{\max}$ — максимальные радиусы рассматриваемых задач.

Теперь очевидно и решение поставленной нами задачи.

Аналитическое продолжение внешнего потенциала притяжения небесного тела произвольной слоистой структуры возможно вплоть до сферы радиуса $\bar{r} < R_{\max}$, если

- 1) поверхность тела подчиняется условию (3),
- 2) границы раздела внутренних слоев, выходящих вне сферы радиуса $\bar{r}$, подчиняются также условию (3), где $R_{\max}$ — максимальный радиус соответствующей границы.

Заметим, что поскольку внутренние слои не обязательно должны быть параллельными поверхности, то внутреннее строение тела может быть довольно сложным. Но условие слоистости предполагает отсутствие локальных максимумов и минимумов плотности.

В заключение отметим, что полученное решение имеет не только теоретический интерес, но может быть использовано в астрономии для определения потенциала притяжения внутри небесных объектов слож-

ной слоистой структуры, если из наблюдений известны: внешний потенциал такого объекта (например, из наблюдений его спутников), формы границ раздела слоев, а также распределение масс, лежащих только вдоль радиуса над исследуемой точкой.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубошин Г. Н. Теория притяжения. М., 1961. [2] Сретенский Л. И. Теория ньютоновского потенциала. М.; Л., 1946. [3] Чуйкова Н. А. // Изв. вузов, Геодезия и аэрофотосъемка. 1980. № 4. С. 54. [4] Чуйкова Н. А. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 1984. 25, № 1. С. 22.

Поступила в редакцию
08.10.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 4

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 592.315

ВЛИЯНИЕ ПЕРЕЗАРЯДКИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ НА ТОКИ ЛАВИННОЙ ИНЖЕКЦИИ В СИСТЕМЕ Si—SiO₂—МЕТАЛЛ

С. Н. Козлов, В. В. Супрунов

(кафедра общей физики и молекулярной электроники)

Исследовано влияние заряжения поверхностных электронных состояний в системе Si—SiO₂ — металл на процесс переноса горячих электронов из кремния в окисный слой при лавинном пробое в кремнии. Показано, что основной механизм такого влияния — «интегральное» изменение электрического поля в области пространственного заряда полупроводника при заряджении поверхностных состояний. Предложен новый метод определения плотности поверхностных электронных состояний, основанный на измерении зависимостей токов лавинной инжекции электронов из полупроводника в диэлектрик от амплитуды импульсов истощающего напряжения.

Лавинная инжекция электронов из кремния в пленку SiO₂ широко используется при изучении электронного захвата на ловушки диэлектрического слоя [1], а также при исследовании закономерностей инжекционно-стимулированного дефектообразования как на границе Si—SiO₂, так и в слое окисла [2—4]. Несмотря на большое количество работ, в которых затрагиваются в той или иной мере проблемы, связанные с лавинной инжекцией, остаются практически неизученными эффекты, обусловленные влиянием границы раздела полупроводник — диэлектрик на процессы переноса горячих носителей заряда из полупроводника в диэлектрик.

В настоящей работе исследовано влияние перезарядки электронных состояний на границе раздела Si—SiO₂ на токи импульсной лавинной инжекции электронов из кремния в окисел и на основании полученных результатов предложен новый способ определения плотности электронных состояний на границе Si—SiO₂ (ПС).

В экспериментах использовались МДП-структуры, изготовленные на основе кремния *p*-типа с концентрацией бора $N_B = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$. Исследовались поверхности (100), термически окисленные в сухом кислороде с добавлением иода; толщина окисного слоя $d \approx 1000 \text{ \AA}$. В качестве полевых электродов использовался напыленный в вакууме молибден (площадь металлических электродов $S = 0,01 \text{ см}^2$). Измерения плотно-