[1, 2]) функция $\varphi(k) \sim k^{-2}$, и это объясняется существенным вкладом конвективных процессов в распределение энергии турбулентных пульсаций по спектру.

Разумеется, можно утверждать, что зависимость (11) фактически мало отличается от закона «—5/3». Однако это не уменьшает теоретического интереса отмеченного отличия.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Grant H. L., Steward R. W., Moilliett A. // J. Fluid Mech. 1962. **12**. P. 241. [2] Grant H. L., Moilliett A. // J. Fluid Mech. 1962. **13**. P. 237. [3] Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Л., 1980. С. 263. [4] Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., 1967. С. 112.

Поступила в редакцию 06.12.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 4

УДК 519.21

# НЕЛИНЕЙНАЯ РЕДУКЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИСТАНЦИОННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ АТМОСФЕРЫ

**Т. В. Матвеева, Ю. П. Пытьев**

*(кафедра физики атмосферы и математической геофизики)*

**На примере характерных задач дистанционного зондирования атмосферы показано, что большинство задач интерпретации измерений сводится к проблеме вычисления значений функции по неточно заданному аргументу. Результаты вычислительного эксперимента позволяют сделать вывод о целесообразности применения методов нелинейной редукции для решения прикладных задач.**

Схема измерений большинства физических экспериментов по дистанционному зондированию атмосферы может быть представлена в виде

$$\xi = a(f) + \nu, \quad f \in \mathcal{F}, \tag{1}$$

где $\xi$ — результат измерения, $a(\cdot)$ — известная функция, $f$ — вектор параметров объекта, $\mathcal{F}$ — множество, априори содержащее вектор $f$, $\nu$ — случайный вектор (шум), моделирующий ошибки измерения. Исследователя, как правило, интересует значение $f$ или, в более общем случае, $U(f)$ — параметров исследуемого объекта.

Рассмотрим простейшие эксперименты в атмосферной оптике. Пусть наземный приемник ориентирован в направлении падения прямого солнечного излучения и регистрирует интенсивность радиации в узком спектральном диапазоне в окрестности длины волны $\lambda$:

$$\xi = J(\lambda) + \nu, \tag{2}$$

где $J(\lambda)$ — интенсивность прямого солнечного излучения, ослабленного на пути от верхней границы атмосферы до точки наблюдения. Согласно закону Бугера, $J(\lambda) = S_\lambda \exp\{-T(0, \vartheta_s(0))\}$. Величина $S_\lambda$ определяется спектром интенсивности внеатмосферной солнечной радиации, $T(z, \vartheta_s(z))$ — оптическая толща вдоль пути от верхней границы атмосферы до точки $z$, $\vartheta_s(z)$ — видимый угол Солнца. В задаче определения оптической толщи, согласно схеме (1), $f = T(0, \vartheta_s(0))$, $a(f) = S_\lambda \exp\{-f\}$.

Оптическая толща может быть представлена в виде $T = T_m(\vartheta_s) + T_a(\vartheta_s) + T_{O_3}(\vartheta_s)$, где $T_m(\vartheta_s)$ определяется полным рэлеевским (молекулярным) рассеянием, $T_a(\vartheta_s)$ — аэрозольная оптическая толща, $T_{O_3}(\vartheta_s)$ — толща, определяемая поглощением озона, $T_{O_3}(\vartheta_s) = \alpha_\lambda x m(\vartheta_s)$, где $\alpha_\lambda$ — сечение поглощения озона, $x$ — общее содержание озона, $m(\vartheta_s)$ — оптическая масса атмосферы. Если исследователя интересует общее содержание озона, то в соответствии со схемой (1) $f = x$, $a(f) = S_\lambda \exp\{-T_a(\vartheta_s) - T_m(\vartheta_s) - \alpha_\lambda m(\vartheta_s) f\}$.

В качестве еще одного характерного примера задач дистанционного зондирования атмосферы рассмотрим задачу трассового лидарного зондирования. В эксперименте на расстоянии $R$ от лидара ставится отражающий экран и регистрируется интенсивность излучения, отраженного от него и ослабленного на пути $2R$. В приближении однократного рассеяния лидарное уравнение имеет вид

$$P = (P_0 A/R^2)\,\beta\eta \exp\left\{-2\int\limits_0^R \alpha(r)\,dr\right\},$$

где $P_0$ — мощность излучения лазера, $\eta$ — коэффициент отражения, $\beta$ — объемный коэффициент обратного рассеяния, $A$ — аппаратурная функция, $\alpha$ — объемный коэффициент полного ослабления. Ослабление на трассе можно представить так: $\exp\{-2\alpha R\} = \exp\{-2\sigma NR\}\exp\{-2\alpha_a R\}$, где $\exp\{-2\alpha_a R\}$ определяет ослабление за счет рассеяния, $N$ — интересующая нас концентрация примеси, $\sigma$ — сечение поглощения. Запишем схему лидарных измерений:

$$\xi = A_0 \exp\{-\tilde{\alpha} N\} + \nu, \tag{3}$$

$A_0 = (P_0\beta\eta A/R^2)\exp\{-2\alpha_a R\}$, $\tilde{\alpha} = 2\sigma R$. Согласно обозначениям схемы (1), $f = N$, $a(f) = A_0 \exp\{-\tilde{\alpha} f\}$.

На практике в задачах лидарного зондирования атмосферы ситуация, как правило, более сложная, поскольку параметры реальной атмосферы во время проведения измерений неизвестны. Поэтому в рассмотренном методе дифференциального поглощения используется двухчастотный лидар, причем частоты зондирующего и опорного излучений выбираются соответственно на и вне линии поглощения интересующей примеси. В рамках данной задачи схему измерений можно представить в виде

$$\boldsymbol{\xi} = a(\mathbf{f}) + \boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},\quad a(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_1 \exp\{-\tilde{\alpha} f_2\} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix},$$

и нас по-прежнему интересует концентрация поглощающей примеси — $U(f) = f_2$. Для определения $f$ или $U(f)$ часто применяется метод наименьших квадратов (МНК), позволяющий определять $f$ из условия

$$\|\xi - a(f)\|^2 \sim \min_{f\in\mathcal{F}}. \tag{5}$$

Далее речь пойдет о задаче редукции измерения $\xi$, в которой требуется определить оператор $R(.)$ так, чтобы $R(\xi)$ можно было использовать как наиболее точную в среднем квадратичном версию значения $U(f)$.

Во многих физических экспериментах нелинейные задачи интерпретации измерений сводятся к вычислению значения функции $a^{-1}(.)$, аргумент которой $a(f)$, согласно равенству (1), известен с ошибкой $\nu$. Итак, рассмотрим задачу определения значения $U(f)$ заданной функции $U(.)$, когда значение аргумента $f$ известно приближенно в виде

$$\xi = f + \nu.$$

Пусть $f$ — случайный вектор $R_n$, задано ограниченное множество $\mathcal{F} \subset R_n$, априори содержащее $f$, $q(.)$ — плотность распределения $f$ на $\mathcal{F}$, задан класс распределений $\nu$, сосредоточенных на ограниченном множестве $\Delta \in R_n$. Следуя работе [1], рассмотрим задачу интерпретации измерений (5) как задачу на условный минимум:

$$\inf\{h_1^2(R,\ U) \mid h_2^2(R) \leqslant \varepsilon\}, \tag{6}$$

разрешимую на соболевском классе $W_2^1$ функций $R(.)$. Здесь

$$h_1^2(R,\ U) = \int\limits_{\mathcal{F}} \|R(f) - U(f)\|^2 q(f)\,df$$

контролирует систематическую погрешность, а

$$h_2^2(R) = \int\limits_{\mathcal{D}} \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}(x)\,\partial R/\partial x_i\,\partial R/\partial x_j\,dx,\quad \mathcal{D} = \{f + x,\ f \in \mathcal{F},\ x \in \Delta\}$$

оценивает уровень шума редукции.

Рассмотренные задачи (2), (3), (4) можно представить в терминах задачи (5). Так, для задачи восстановления общего содержания озона в схеме (2) будем обозначать $f=S_\lambda \exp\{-T(0, \vartheta_s(0))\}$, тогда

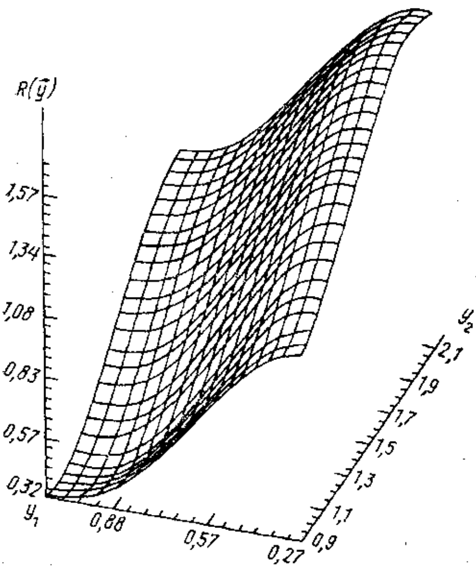
$$U(f) = -\{(\ln(f/S_\lambda) + T_m(\vartheta_s) + T_a(\vartheta_s))/\alpha_\lambda m(\vartheta_s)\}, \quad \mathscr{F} = \{f : a_1 \leqslant f \leqslant a_2\},$$

где $[a_1, a_2]$ — интервал, где априори содержится $f$. В задаче восстановления концентрации поглощающей примеси (схема (4)) положим

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \exp\{-\tilde{\alpha}N\} \end{pmatrix}, \quad U(f) = (-1/\tilde{\alpha}) \ln(f_2/f_1).$$

Априори задано

$$\mathscr{F} = \left\{\mathbf{f}, \begin{array}{l} \underline{a_1} \leqslant f_1 \leqslant \overline{a_1} \\ \underline{a_2} \leqslant f_2 \leqslant \overline{a_2} \end{array}\right\}, \quad \Delta = \left\{\mathbf{v}, \begin{array}{l} |v_1| \leqslant \Delta_1 \\ |v_2| \leqslant \Delta_2 \end{array}\right\}. \tag{7}$$




Вид нелинейного оператора $R(\mathbf{y})$, полученного как решение задачи (6) для области $\mathscr{D} = \{f+x,\ f \in \mathscr{F},\ x \in \Delta\}$, где $\mathscr{F}$, $\Delta$ определены согласно (7)

В вычислительном эксперименте предполагалось, что шум $\nu$ распределен равномерно либо сосредоточен в точках $\pm\Delta$. Вычислялось значение фактической погрешности

$$h(R, \xi) = \int_{\mathscr{F}} \|R(\xi) - U(f)\|^2 q(f)\, df.$$

Причем, поскольку решение задачи (6) параметрически зависит от $\varepsilon$, значение $\varepsilon$ в вычислительном эксперименте выбиралось из условия минимальности фактической погрешности.

Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют в пользу нелинейной редукции. Так, фактическая погрешность, полученная на основе МНК, оказалась в 1,7 раза больше погрешности, полученной на основе нелинейной редукции. Для задачи (4) проведено сравнение результата нелинейной редукции с традиционно используемым в качестве оценки $N$ значением оператора $U(\xi) = -(1/\bar{\alpha})\ln(\xi_2/\xi_1)$. Вид нелинейного оператора $R(\mathbf{y})$, полученного как решение задачи (6), представлен на рисунке. Значения фактической погрешности для $U(\xi)$ и $R(\xi)$ при различных значениях $\Delta$ приведены в таблице. Как видно из таблицы, фактическая погрешность метода нелинейной редукции вновь выгодно отличается от погрешности традиционного метода. Приведенные примеры позволяют сделать вывод о целесообразности применения нелинейной редукции в задачах интерпретации физических измерений.

**Значения фактической погрешности для оператора нелинейной редукции $R(\xi)$ и оператора $U(\xi)$ при различных значениях $\Delta$ ($\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4$)**

| | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $U(\xi)$ | 0,0077 | 0,031 | 0,066 | 0,11 |
| $R(\xi)$ | 0,0062 | 0,021 | 0,051 | 0,08 |

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Пытьев Ю. П. // Матем. моделирование. 1989. 1, № 5. С. 44.



Поступила в редакцию
22.01.91