

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 539.141

**О РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ
НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТИЦ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ**

В. Г. Айрапетян, В. В. Комаров, А. М. Попова, Х. Нейман *

(НИИЯФ)

Метод масштабных преобразований используется для учета влияния внешнего поля на параметры двухчастичных резонансов в конечном состоянии многочастичных ядерных реакций.

При исследовании явлений атомной и ядерной физики нередко приходится иметь дело с резонансными системами, подверженными влиянию внешнего поля (например, кулоновского поля сопутствующей частицы). Следует ожидать, что в таких случаях параметры резонанса будут отличаться от тех, что были бы в отсутствие внешнего поля. В этой связи возникает задача определения степени изменения резонансных параметров под действием внешнего поля.

В последнее время в ряде работ (см., напр., [1]) было показано, что параметры резонансных состояний системы нескольких частиц во внешнем поле зависят не только от свойств внешнего поля, но также от скорости и направления движения самих частиц. При этом предполагалось, что внешнее поле действует на центр масс системы. В рамках такого подхода траектории частиц оказываются искаженными, и это эффективно проявляется как изменение параметров резонанса.

Однако представляется интересным также установить степень изменения резонансных параметров за счет искажения внутреннего движения в резонансной системе. В качестве примера мы исследуем распад резонансной системы, образующейся в ядерной реакции, при условии, что сопутствующие продукты являются заряженными. Другими словами, пусть в результате ядерной реакции образовалась резонансная система двух частиц (1, 2), находящихся в поле заряженной частицы 3. Для простоты будем считать, что заряжена лишь одна из частиц резонансной системы (например, частица 1), а сама резонансная система уже находится вне пределов ядерных сил со стороны частицы 3, т. е. внешнее поле — чисто кулоновское. При этих предположениях гамильтониан системы имеет вид (в единицах $m_p = \hbar = e = 1$)

$$H = H_0 + V_{12} + V_{13}, \tag{1}$$

где H_0 — оператор кинетической энергии системы, V_{12} — потенциал резонансного взаимодействия частиц 1 и 2, $V_{13} = Z_1 Z_3 / r_{13}$ — потенциал кулоновского взаимодействия резонансной системы с внешним полем.

Влияние кулоновского взаимодействия V_{13} сводится, во-первых, к искажению траектории центра масс резонанса и, во-вторых, к искажению внутреннего движения в резонансной паре, поскольку центр масс ее не совпадает с центром заряда. Следовательно, для оценки изменения резонансных параметров за счет искажения внутреннего движения необходимо развить теорию возмущений оператора $H_R = H_{012} + V_{12}$ (H_{012} — оператор кинетической энергии относительно движения в паре

* Марбургский университет, Германия.

(1, 2)) потенциалом $\Delta V = Z_1 Z_2 (1/r_{12} - 1/\rho)$, где ρ — расстояние между центром масс двух резонирующих частиц и третьей частицей. Но осуществление этой схемы связано с двумя проблемами: с проблемой нормировки волновой функции резонансного состояния и с проблемой представления возмущения ΔV в удобном для проведения необходимых расчетов виде.

Что касается первой из указанных выше проблем, то она имеет принципиальное значение и связана с общей проблемой описания резонансов. В настоящей работе мы исходим из определения резонанса как полюса на аналитическом продолжении резольвенты оператора энергии резонансной системы на второй (нефизический) лист энергии [2]. На этом пути для описания резонансов широко используется техника масштабных преобразований [2], связанная с введением комплексных пространственных координат. При этом оказывается, что полюсы аналитического продолжения резольвенты гамильтониана системы H соответствуют собственным значениям несамосопряженного оператора $H(\theta)$ (θ — комплексный параметр масштабного преобразования), полученного из оператора H в результате масштабного преобразования.

Группой операторов масштабных преобразований на \mathbf{R}^3 называется группа унитарных операторов $U(\theta)$, действующих согласно формуле

$$f(\theta, \mathbf{r}) = U(\theta) f(\mathbf{r}) = \exp \left\{ \frac{3}{2} \theta \right\} \cdot f(\exp \{\theta\} \cdot \mathbf{r}).$$

Идея, лежащая в основе применения метода масштабных преобразований к описанию резонансов, заключается в том, что при действии оператора масштабного преобразования очень просто преобразуется оператор кинетической энергии H_0 :

$$H_0(\theta) = U(\theta) H_0 U^{-1}(\theta) = \exp \{-2\theta\} H_0.$$

Из этого равенства следует, что оператор $H_0(\theta)$, заведомо определенный при действительных θ , допускает аналитическое продолжение на комплексные θ . Мы ограничим класс рассматриваемых потенциалов таким образом, чтобы подобное аналитическое продолжение было возможно и для оператора $H_0 + V$. Спектральные свойства оператора $U(\theta) (H_0 + V) U^{-1}(\theta)$ таковы, что его дискретный спектр «локально» не зависит от θ [2], в то время как непрерывный спектр заметно меняется при изменении θ . Справедливость последнего утверждения видна уже на примере H_0 , спектр которого при масштабном преобразовании принимает вид $\sigma(H_0(\theta)) = \{z \mid \arg z = -2\operatorname{Im} \theta\}$, где z — энергия.

Класс потенциалов, аналитических относительно масштабных преобразований, достаточно широк и включает наиболее часто встречающиеся в атомной и ядерной физике потенциалы. Так, например, кулоновский потенциал является аналитическим относительно масштабных преобразований при $|\operatorname{Im} \theta| < \pi/2$ (аналитическими в соответствующих областях изменения θ являются потенциал Юкавы, экспоненциальный потенциал, гауссовский потенциал, потенциал Вудса—Саксона, нелокальный сепарабельный потенциал Ямагучи) [3].

В настоящей работе мы рассматриваем оператор

$$\tilde{H} = H_{012} + V_{12} + \Delta V = H_R + \Delta V. \quad (2)$$

Кулоновский потенциал ΔV в (2) является аналитическим относительно масштабных преобразований при $|\operatorname{Im} \theta| < \pi/2$. Относительно потен-

циала V_{12} будем предполагать, что он также аналитичен при $|\text{Im } \theta| < \pi/2$.

Обозначим энергию невозмущенного резонанса через $z = E_R + i\Gamma$, $\Gamma < 0$, и выберем его асимптотическую волновую функцию в виде

$$\Psi_R(r) = N \exp\{ikr\}/r, \quad (3)$$

где N — постоянная, $k = k_1 - ik_2$, ($k_1, k_2 > 0$) — волновое число резонанса, $r \equiv r_{12}$ — относительное расстояние в паре (1, 2). Этот резонанс согласно методу масштабных преобразований соответствует собственному значению несамосопряженного оператора

$$H_R(\theta) = U(\theta) H_R U^{-1}(\theta) = \exp\{-2\theta\} H_{012} + V_{12}(\theta)$$

с энергией z и волновой функцией

$$\Psi_R(\theta, r) = U(\theta) \Psi_R(r) = N \exp\{-\theta/2\} \exp\{ik \exp\{\theta\} \cdot r\}/r. \quad (4)$$

Выберем параметр масштабного преобразования чисто мнимым: $\theta = i\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) (нас интересуют только повороты в координатном пространстве, но не растяжения). Легко видеть, что в отличие от расходящейся на бесконечности функции (3) преобразованная волновая функция (4) экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$, если только $\alpha > \alpha_0 = \text{arctg } k_2/k_1$. Это означает, что в первом порядке теории возмущений поправку к энергии резонанса можно вычислить по формуле [2]

$$\Delta z = \frac{\langle \Psi_R(i\alpha, r) | \Delta V(i\alpha, r) | \Psi_R(i\alpha, r) \rangle}{\langle \Psi_R(i\alpha, r) | \Psi_R(i\alpha, r) \rangle}. \quad (5)$$

Отметим, что поправка Δz , вычисленная согласно (5), не зависит от α в интервале $\alpha \in (\alpha_0, \pi/2)$ при условии, что функция $\Psi_R(r)$ является точной волновой функцией невозмущенного резонанса [2].

Перейдем к рассмотрению второй проблемы — проблемы представления возмущения ΔV в удобном для расчетов виде. Прежде всего заметим, что влияние ΔV на параметры резонанса становится существенным только с момента развала резонанса на фрагменты (когда становятся несущественными ядерные силы), т. е. через время $\tau = 1/\Gamma$ после образования резонанса в ядерной реакции. Выберем этот момент в качестве начального. К начальному моменту третья частица находится на расстоянии ρ_0 от центра масс пары (1, 2) и имеет скорость v_0 (величины ρ_0 и v_0 определяются из законов сохранения).

Введем в рассмотрение параметр $\varepsilon = R/\rho$, характеризующий отношением расстояния между резонансными фрагментами к расстоянию между третьей частицей и центром масс резонанса. Эта величина является медленно меняющейся функцией времени, и для ядерных реакций (когда после распада резонанса можно пренебречь влиянием кулоновского взаимодействия на абсолютные значения скоростей частиц)

ее среднее значение $\bar{\varepsilon} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(t) dt \right\}$ оказывается равным $\bar{\varepsilon} \simeq u_0/v_0$, где u_0 — относительная скорость в резонансной паре в момент распада. Отметим, что для ядерных реакций обычно $\bar{\varepsilon} < 1$.

С учетом сказанного выше возмущение $\Delta V = Z_1 Z_3 (1/r_{13} - 1/\rho)$ можно представить в виде

$$\Delta V = \left\{ Z_1 Z_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right]^n \varepsilon^{n+1} P_n(\cos \varphi) \right\} \frac{1}{R}, \quad (6)$$

где m_1 и m_2 — массы резонансных фрагментов, φ — угол разлета между заряженными частицами 1 и 3, $P_n(x)$ — полином Лежандра.

Поскольку влияние кулоновского потенциала становится заметным только после развала резонанса, то для проведения расчетов с достаточной степенью точности можно воспользоваться асимптотической резонансной волновой функцией (4). Прямая подстановка (4) и (6) в правую часть (5) приводит к следующему выражению для поправки к энергии резонанса в первом порядке теории возмущений:

$$\Delta z = -2iZ_1Z_3kE_1(-2ik \exp\{i\alpha\} R_0) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right]^{n-1} P_n(\cos \varphi), \quad (7)$$

где $E_1(x)$ — интегральная показательная функция, R_0 — нижний предел интегрирования в радиальной части числителя правой части (5), имеющий смысл расстояния между резонансными фрагментами в момент распада.

Заметим, что при расчете величины Δz в первом порядке теории возмущений и при выборе резонансной волновой функции в виде (4) зависимость от параметра преобразования α остается в формуле (7) как поправка к резонансной энергии. Однако, как следует из работ [4, 5], формула вида (7) для определения Δz верна для тех значений α , при которых нормировка волновых функций $\Psi_R(i\alpha r)$ и выражение для Δz (7) совпадают с результатами расчетов этих величин, полученными другими методами.

В нашем случае формула (7) может быть хорошим приближением в пределе $\alpha \rightarrow \alpha_0$, так как величина $N = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \langle \Psi_R(i\alpha, r), \Psi_R(i\alpha, r) \rangle$ и

$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \Delta z(\alpha)$ совпадают с результатами, полученными методом регуляризации [6, 7].

Обоснованием для выбора предела $\alpha \rightarrow \alpha_0$ при расчете Δz по формуле (7) может служить тот факт, что при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ точка резонанса с энергией z невозмущенного оператора H оказывается в непрерывном спектре преобразованного оператора $H(i\alpha_0)$. Тогда волновая функция $\Psi_R(i\alpha_0 r)$ экспоненциально убывает на бесконечности, как и функция действительного собственного значения самосопряженного оператора, для которого справедлив расчет в первом приближении теории возмущений [3].

Рассмотрим один частный случай резонанса $z = E_R + i\Gamma$ оператора Шрёдингера (H) сложной системы, распадающейся на несколько связанных кластеров, т. е. когда начало непрерывного спектра Σ_0 оператора H лежит на отрицательной действительной полуоси энергии и действительная часть резонансной энергии также отрицательная величина. Тогда, если для параметров резонанса выполняется условие $|E_R| \gg |\Gamma|$ и $E_R, \Gamma < 0$, параметр масштабного преобразования следует устремить к предельному значению $\pi/2$, ($\alpha_0 \rightarrow \pi/2$). Если же для параметров резонанса z выполняется условие $|E_R| \gg |\Gamma|$ и $E_R > 0, \Gamma < 0$, то параметр масштабного преобразования следует устремить к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Комаров В. В., Порова А. М., Шаблов В. Л., Грин А. М. // Mod. Phys. Lett. 1987. 2, N 2. P. 81. [2] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М., 1982. [3] Комаров В. В., Попова А. М., Шаблов В. Л. // ЭЧАЯ. 1985. 16, № 2. С. 407. [4] Balslev E., Combes J. H. // Comm. Math. Phys. 1971. 22. P. 280. [5] Heibler B. // Theses Procee-

УДК 539.374

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ БЕЗДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

В. Л. Попов

(кафедра физики низких температур и сверхпроводимости)

В рамках простейшей калибровочной теории изотропного упруго-пластического континуума без диссипации исследован процесс распространения упруго-пластических волн. Показано, что возмущение, индуцированное коротким ударом, с течением времени распадается на шесть групп волн, имеющих различный характер распространения.

Эффективным математическим аппаратом для исследования конденсированных сред с дефектами в последние годы стали калибровочные теории [1, 2]. До сих пор, однако, получено лишь небольшое количество явных решений соответствующих уравнений, что затрудняет их физическую интерпретацию и сравнение с экспериментом. В настоящей работе исследуется калибровочная теория упруго-пластической среды, в которой принимается во внимание только трансляционная пластичность. Будучи линейной, она позволяет полностью определить спектр ее нормальных колебаний и характер распространения возмущений, созданных в начальный момент времени в ограниченной области тела (например, путем удара).

1. Динамические уравнения для бездиссипативной среды можно получить уже из одних только требований локальной калибровочной инвариантности лагранжиана упруго-пластической среды. Будем исходить из обычного лагранжиана изотропного упругого тела:

$$\mathcal{L}_{el} = \int dV \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — вектор смещения точки с начальной координатой \mathbf{x} ; ρ — плотность среды; λ , μ — коэффициенты Ламе; dV — элемент объема. При введении пластических степеней свободы, описываемых тензором пластической дисторсии β_{ik} , первый член в (1), описывающий кинетическую энергию, не изменяется. Второй и третий члены, описывающие потенциальную энергию, сохраняют свою форму, но вместо полной дисторсии $\partial u_i / \partial x_k$ в них будет стоять теперь только ее упругая часть

$$\beta_{ik}^{el} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ik}.$$

Помимо этих слагаемых необходимо добавить в лагранжиан члены, описывающие кинетическую и потенциальную энергию самих дефектов. Эти члены должны представлять собой инварианты, образованные