dings/Eds. E. Brändas. N. Elander: Lecture Notes in Phys. Springer-Verlag. Berlin, 1988. P. 67. [6] Brändas E.//Int. J. Quant. Chem. 1986. **20**. P. 119. [7] Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., 1971.

Поступила в редакцию
03.01.90

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1991. Т. 32, № 5

УДК 539.374

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ БЕЗДИССИПАТИВНОЙ СРЕДЕ

В. Л. Попов

(кафедра физики низких температур и сверхпроводимости)

В рамках простейшей калибровочной теории изотропного упруго-пластического континуума без диссипации исследован процесс распространения упруго-пластических волн. Показано, что возмущение, индуцированное коротким ударом, с течением времени распадается на шесть групп волн, имеющих различный характер распространения.

Эффективным математическим аппаратом для исследования конденсированных сред с дефектами в последние годы стали калибровочные теории [1, 2]. До сих пор, однако, получено лишь небольшое количество явных решений соответствующих уравнений, что затрудняет их физическую интерпретацию и сравнение с экспериментом. В настоящей работе исследуется калибровочная теория упруго-пластической среды, в которой принимается во внимание только трансляционная пластичность. Будучи линейной, она позволяет полностью определить спектр ее нормальных колебаний и характер распространения возмущений, созданных в начальный момент времени в ограниченной области тела (например, путем удара).

1. Динамические уравнения для бездиссипативной среды можно получить уже из одних только требований локальной калибровочной инвариантности лагранжиана упруго-пластической среды. Будем исходить из обычного лагранжиана изотропного упругого тела:

$$\mathscr{L}_{\rm el}=\int dV\left\{\frac{1}{2}\rho\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial u_i}{\partial t}-\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)-\frac{\lambda}{2}\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — вектор смещения точки с начальной координатой $\mathbf{x}$; ρ — плотность среды; λ, μ — коэффициенты Ламе; dV — элемент объема. При введении пластических степеней свободы, описываемых тензором пластической дисторсии β_{ik}, первый член в (1), описывающий кинетическую энергию, не изменяется. Второй и третий члены, описывающие потенциальную энергию, сохраняют свою форму, но вместо полной дисторсии $\partial u_i/\partial x_k$ в них будет стоять теперь только ее упругая часть

$$\beta_{ik}^{\rm el}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-\beta_{ik}.$$

Помимо этих слагаемых необходимо добавить в лагранжиан члены, описывающие кинетическую и потенциальную энергию самих дефектов. Эти члены должны представлять собой инварианты, образованные с помощью временных и пространственных производных тензора β_{ik}. Ограничиваясь членами второго порядка по β_{ik}, получим для них

$$\mathscr{L}' = \int \left\{ \frac{B}{2} \dot{\beta}_{km}\dot{\beta}_{km} - \frac{C}{2} \alpha_{km}\alpha_{km} \right\} dV,$$

где

$$\alpha_{km} = \operatorname{rot} \widehat{\beta} = e_{ijk} \frac{\partial \beta_{jm}}{\partial x_i}$$

— тензор плотности дислокаций; e_{ijk} — полностью антисимметричный единичный тензор; B, C — константы материала.

Таким образом, простейший вид полного лагранжиана упруго-пластической среды есть

$$\mathscr{L}_{\text{el-pl}} = \int dV \left\{ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ik} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ik} \right) - \right.$$
$$- \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \beta_{ik} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \beta_{ki} \right) - \lambda \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \beta_{ii} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \beta_{kk} \right) +$$
$$\left. + \frac{B}{2} \dot{\beta}_{km}\dot{\beta}_{km} - \frac{C}{2} \alpha_{km}\alpha_{km} \right\}. \tag{2}$$

Роль калибровочных полей в нем играют пластические дисторсии β_{ik}. Для несжимаемых при пластической деформации сред необходимо наложить на тензор β_{ik} условие сохранения объема:

$$\operatorname{sp} \beta_{ij} = \beta_{kk} = 0. \tag{3}$$

2. Варьируя лагранжиан (2) с учетом условия (3) по u_i и β_{ij}, нетрудно получить следующую систему динамических уравнений упруго-пластической среды:

$$\rho \ddot{u}_i - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} - \lambda \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial x_k} = 0, \tag{4}$$

$$B\ddot{\beta}_{ij} - \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \beta_{ij} - C e_{kim} e_{lpm} \frac{\partial^2 \beta_{pj}}{\partial x_k \partial x_l} + \eta \delta_{ik} \delta_{jk} = 0, \tag{5}$$

$$\beta_{kk} = 0, \tag{6}$$

где η — неопределенный множитель Лагранжа.

Решение системы (4)—(6) ищем в виде

$$u_i,\ \beta_{ij} \sim \exp\{-i\omega t + i\mathbf{kr}\}.$$

Получающееся при этом секулярное уравнение одиннадцатого порядка относительно ω^2 имеет корни

$$\omega_{1,2}^2 = \mu/B, \tag{7}$$

$$\omega_{3,4,9}^2 = (\mu + Ck^2)/B, \tag{8}$$

$$\omega_{5,6}^2 = \omega_{7,8}^2 = \frac{\mu}{2B} + \frac{\mu}{2\rho} k^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2B} + \frac{\mu}{2\rho} k^2 \right)^2 - \frac{\mu C}{\rho B} k^4}, \tag{9}$$

$$\omega_{9,10}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{B} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} k^2 \right] \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{\mu}{B} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} k^2 \right]^2 - \frac{\lambda\mu}{\rho B} k^2}. \tag{10}$$

Формулы (7)—(10) определяют законы дисперсии всех одиннадцати ветвей нормальных колебаний рассматриваемой модели упруго-пластической среды. Ход соответствующих дисперсионных кривых показан на рис. 1. Через ω_0 обозначена частота «оптических колебаний» среды: $\omega_0=\sqrt{\mu/B}$.

3. Дисперсионные кривые возбуждений рассматриваемой модели имеют три характерные скорости: $c_{\parallel}=\sqrt{(\lambda+\mu)/\rho}$, $c_{\perp}=\sqrt{\mu/\rho}$ и $c^*=\sqrt{C/B}$. Первые две из них имеют смысл скоростей продольной и поперечной звуковых волн в упругом континууме (если бы не было связи

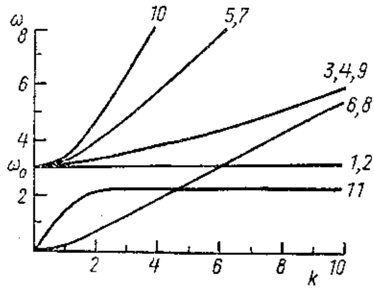

Рис. 1. Дисперсионные кривые нормальных мод, вычисленные при $\mu=0{,}85$, $\lambda=2{,}3$, $B=0{,}19$, $C=0{,}05$; $\rho=1$. Цифры указывают порядковые номера мод в соответствии с формулами (7)—(10)

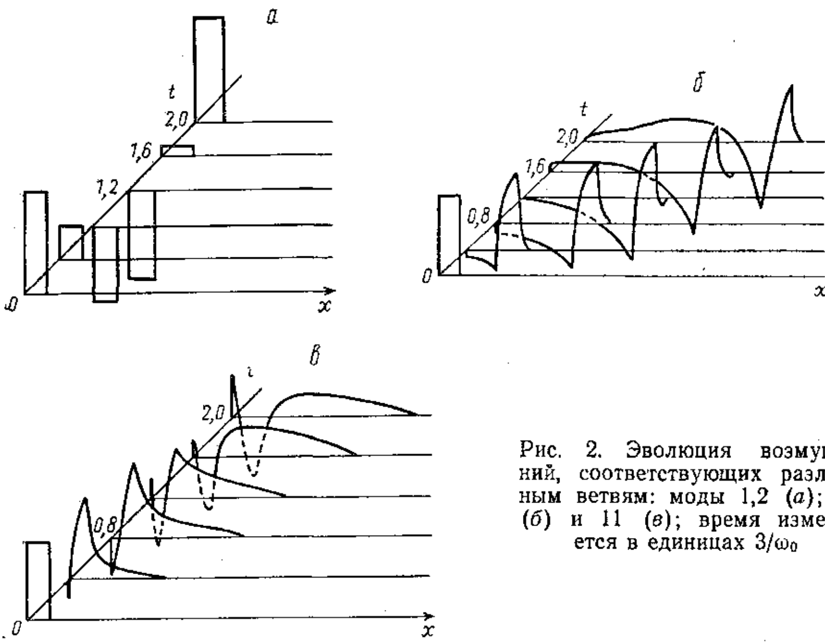

Рис. 2. Эволюция возмущений, соответствующих различным ветвям: моды 1,2 (*а*); 10 (*б*) и 11 (*в*); время измеряется в единицах $3/\omega_0$

с пластическими степенями свободы). Скорость же c^* не имеет аналога в теории упругости. Ее физический смысл — скорость распространения возбуждений в «дислокационном газе». Моды ω_{10}, $\omega_{5,7}$ и $\omega_{3,4,9}$ выходят при $k\to\infty$ на асимптоты, которым соответствуют скорости c $\sqrt{c_{\perp}^2/2+\sqrt{c_{\perp}^4/4-c_{\perp}^2c^{*2}}}$ и c^*. Таким образом, мода 10 асимптотически (при $k\to\infty$) представляет собой продольный звук, моды 5,7 представляют собой суперпозицию поперечных упругих и пластических колебаний, моды же 3, 4, 9 в пределе $k\to\infty$ являются чисто пластическими.

4. Рассмотрим теперь задачу о распространении возмущений, созданных в начальный момент времени в узкой области вблизи поверхности (путем короткого удара). Будем считать, что первоначально импульс имеет прямоугольную форму. Численное решение уравнений (4)—(6) позволяет найти форму импульса в последующие моменты времени. Очевидно, что возмущения, соответствующие модам 1, 2, не имеющим дисперсии, не распространяются в глубь среды (рис. 2, *а*). Распространение возмущения, соответствующего ветви спектра ω_{10}, представлено на рис. 2, *б*. Аналогичный характер распространения имеют возмущения, соответствующие ветвям $\omega_{5,7}$, $\omega_{3,4}$ и ω_9. Распространение возмущения, соответствующего ветви ω_{11}, изображено на рис. 2, *в*.

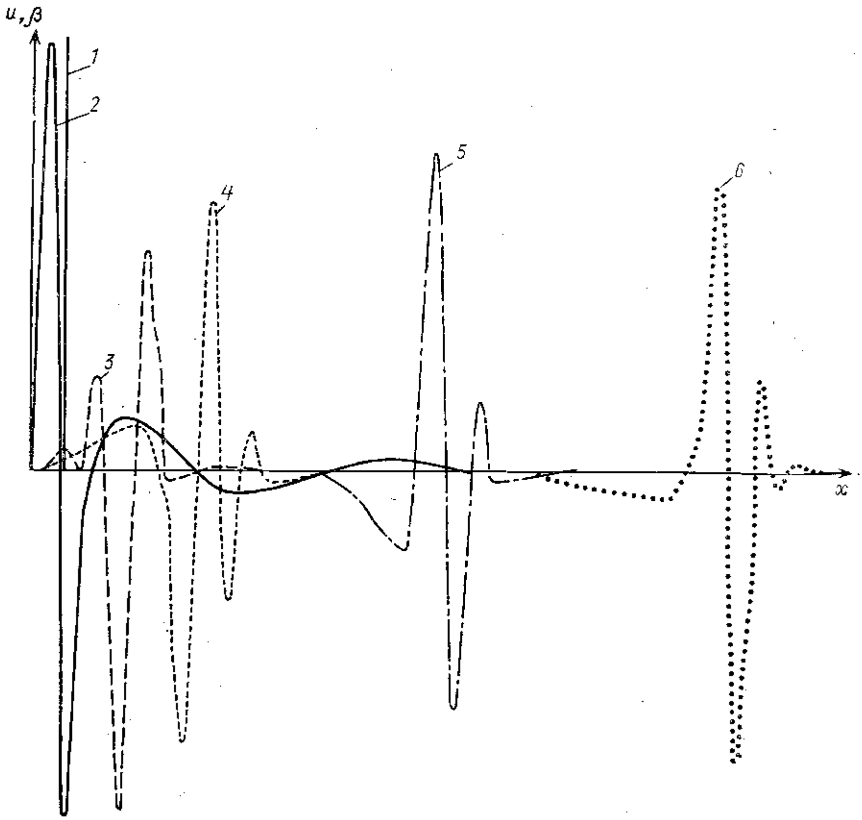

Рис. 3. Распространение возмущения при ударе: кривая *1* — вид возмущения при $t=0$, остальные кривые — возмущения, соответствующие разным модам, в момент времени $t=3\pi/\omega_0$: *2* — ω_{11}; *3* — $\omega_{3,4,9}$; *4* — $\omega_{6,8}$; *5* — $\omega_{5,7}$; *6* — ω_{10}

По прошествии длительного времени возмущение разбивается на шесть групп волн, имеющих различную скорость распространения как фронта, так и области максимальной деформации (рис. 3).

Выводы

Анализ спектра нормальных колебаний изотропного упруго-пластического тела показывает, что оно имеет одиннадцать ветвей нормальных колебаний (вместо трех у упругого континуума), причем различных дисперсионных уравнений имеется только шесть. Соответственно этому возбуждение распадается со временем на шесть групп волн.

Автор благодарен Н. В. Чертовой и Ю. В. Гриняеву за обсуждение рассмотренных проблем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кадич А., Эделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М., 1987. [2] Гриняев Ю. В., Чертова Н. В.//Изв. вузов, Физика. 1990. № 2. С. 36.

Поступила в редакцию
29.06.90